



COMO ESTUDIAR MATEMÁTICAS CORRECTAMENTE®

NEFTALÍ ANTÚNEZ H.

**UN MÉTODO DE AUTOESTUDIO PARA
APRENDER A DOMINAR LOS
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA**



PROHIBIDA SU PUBLICACIÓN



COMO ESTUDIAR MATEMÁTICAS CORRECTAMENTE®

NEFTALÍ ANTÚNEZ H.

**UN MÉTODO DE AUTOESTUDIO PARA
APRENDER A DOMINAR LOS
FUNDAMENTOS MATEMÁTICOS DE
ARITMÉTICA Y ÁLGEBRA**

“Mi familia son los libros; mi hogar, cualquier biblioteca... Quisiera que la humanidad hubiera hablado un idioma en todos los tiempos, para leer los libros de todos los pueblos... Mi ambición, mi ideal, es poseer una biblioteca en un jardín. ¡Flores y Libros! ¡Perfumes y sentimientos! ¡Ideas y colores! Temo a la muerte porque vendrá a interrumpir mis lecturas. ¡Cuántos libros se publicaran después de que yo haya dejado de existir! ¡Qué buenas y bellas cosas se imprimirán que yo ya no he de leer! Esto me desespera. ¡Oh, mis queridos libros, vuestros serán mi corazón, mi inteligencia y mi voluntad! No me habléis de placeres, de fortuna ni de honores; dadme libros, más libros, siempre libros. Cuando la hora de mi muerte haya llegado y comience mi agonía, no me digáis palabras de consuelo, no me lloréis; si me amáis, si queréis que muera dichoso y la eterna sombra se ilumine y el reino de la muerte me sea querido, abrid los Diálogos de Platón y con voz clara, vibrante y sonora, leedme el de Fedón”.

Malatesta

PRESENTACIÓN

El presente texto cubre totalmente el programa vigente del primer curso de Matemáticas en el Bachillerato. Esta dirigido a los alumnos del primer semestre de bachillerato, aunque puede utilizarlo cualquier alumno que curse aritmética y álgebra, incluidos los de nivel secundaria. También, puede leerlo cualquier persona que en general desee incrementar su cultura matemática e incluso alumnos que cursan la primaria.

El libro es resultado de mis veinte años de experiencia y práctica docente. Contiene un método de autoestudio probado y que ha dado magníficos resultados a alumnos de secundaria y bachillerato, e incluso a los alumnos de los primeros semestres de algunas carreras profesionales. Para que dicho método funcione, es necesario que el estudiante se comprometa a seguir estrictamente en orden la secuencia de temas y resolver todos y cada uno de los ejercicios propuestos. Está escrito en un lenguaje claro y accesible, el contenido está ordenado y organizado lógicamente, de manera tal que siga la secuencia natural del aprendizaje.

La certeza de que las matemáticas pueden ser divertidas, ha dado como resultado que este enfoque se utilice en el desarrollo del libro, se espera, que esto dará al estudiante una imagen más clara del verdadero significado de la importancia y belleza de las matemáticas, que la que le daría la tradicional forma de abordarlas con toda una manipulación abstracta.

Al escribir este libro me propuse hacerlo motivador, atractivo, alegre, sencillo y funcional. Hacia éstas características enfoque mis esfuerzos, los cuales se ven coronados con esta obra, la cual espero tenga una muy buena respuesta de los estudiantes de secundaria y bachillerato, ya que está destinada para ellos.

El lector no necesita una gran preparación matemática. Puesto que este libro es un método de autoestudio, el cual expone ampliamente la teoría y ejemplos. Si algún estudiante ya domina algún tema, de cualquier manera deberá realizar sus ejercicios correspondientes, antes de continuar con el siguiente tema.

Los temas considerados en el libro, se aplican en muchas actividades de la época tecnológica que hoy vive el hombre. Su contenido es adecuado para estudiantes de secundaria y bachillerato, que teniendo conocimientos mínimos de matemáticas, desean aprender a dominar los fundamentos matemáticos totalmente.

Las matemáticas tienen un sinnúmero de aplicaciones prácticas, que van desde su uso cotidiano hasta la más avanzada tecnología. Se consideran como parte de nuestra gran herencia cultural, dado que su historia se remonta a varios miles de años. Como tal, el ciudadano común del siglo XXI, deberá estudiarlas para completar su acervo cultural indispensable para poder desempeñar su trabajo. Este nuevo milenio será el que demandará más personal capacitado en matemáticas, porque así lo requieren los avances tecnológicos.



INTRODUCCIÓN

El libro está organizado en tres capítulos, el primero de ellos dedicado a la **motivación**, cuyo objetivo principal es atraer la atención del lector y despertarle un vivo interés por aprender los fundamentos matemáticos. Esto se expone mediante lecturas diversas que ilustran la belleza e importancia de las matemáticas, con lo cual esperamos que el estudiante venza el miedo y temor que tiene hacia ellas. Esto se hace extensamente, de manera tal que al principio da la sensación de que no es un libro de matemáticas, sino otro libro más de motivación o superación personal. Para mi sorpresa, encontré algunos libros recientes, que ya incluyen un poco de motivación y divertimientos matemáticos, pero no hallé ninguno que le dedique un capítulo completo a la motivación. De hecho éste es el primer libro de matemáticas en el mundo que incluye un capítulo completo de motivación.

Me propuse escribir un libro diferente, que primero motive al alumno, mostrándole el lado bonito y amable de las matemáticas, que utilice un método de autoestudio alegre y divertido y que tenga muchas aplicaciones a la vida diaria. Todo esto sin perder su sentido y rigor científico y tratando de respetar el programa vigente de un primer curso de Matemáticas. Por lo anterior, el texto contiene una gran cantidad de ejemplos con aplicaciones prácticas o a la vida real, principalmente en el área tecnológica. Además, se incluyen gran cantidad de ejercicios cuyas respuestas están al final del libro.

Los capítulos segundo y tercero tratan de **Aritmética** y **Álgebra** respectivamente, que son las áreas fundamentales que se estudian en un primer curso de matemáticas. Si el estudiante logra dominarlas seguramente no tendrá problemas de aprendizaje ni en las matemáticas subsecuentes ni en las demás asignaturas del bachillerato que se auxilian de las matemáticas.

El sólo acto de leer el libro no te hará un mejor estudiante, sino la atención y dedicación que le des y la práctica que realices con los ejercicios propuestos será lo que te llevará al éxito. Pero es indispensable que sigas estrictamente las instrucciones, **fundamentalmente que leas una unidad cada día y realices los ejercicios para cimentar tus conocimientos**, ya que sin práctica no hay aprendizaje.

COMO ESTUDIAR MATEMÁTICAS CORRECTAMENTE® contiene las “llaves” para que estudies adecuadamente los fundamentos matemáticos, que comprenden Aritmética y Álgebra, de manera tal que tengas éxito en estas áreas y por lo tanto en tus demás estudios. Sin embargo, estas herramientas dependen de que las utilices adecuadamente, ya que de que te sirven las llaves si nada más las guardas en un

cajón, entonces se convierten en sólo un pedazo de metal, depende de nosotros que les demos vida y que las utilicemos para abrir las puertas correctas. Aquí te doy las llaves, depende de ti utilizarlas.

Finalmente, espero que te diviertas leyéndolo, como yo me divertí al escribirlo. Capta los mensajes que escribí para ti. Al elaborarlo lo hice utilizando la tecnología más actual, incluyendo Internet, Multimedia y enciclopedias electrónicas. Pero sobre todo le puse un gran cariño a ésta obra y mi propia experiencia. Mi deseo es que este libro cumpla su cometido para el que fue escrito, pero debes comprender que de ti más que de cualquier otro, depende que logre su objetivo, ya que un libro cobra vida y significado en la medida de la utilidad que le da el lector.

Invito a los lectores para que me envíen problemas prácticos o didácticos para mejorar esta obra. Cualquier duda, sugerencia ó *crítica constructiva* será bien recibida y contestaré toda la correspondencia que me sea enviada a Calle 3 No.1 Esq. Calle 2, Colonia Siglo XXI, Chilpancingo, Gro., 39010 o a mí correo electrónico: nantunezh@yahoo.com.mx

M en C. Neftalí Antúnez H.

Ingeniero Civil con Maestría en Ciencias en Enseñanza de las Ciencias en el Área de Matemáticas (CIIDET, Instituto Tecnológico de Chilpancingo)

Profesor de Matemáticas y Computación en el CBTis 134 y en la Unidad Académica de Ingeniería.



UNIDAD I

C O M O L E E R
CORRECTAMENTE

"Es fundamental que ustedes (estudiantes) persistan; que hagan de sus estudios los mejores, y sepan que la vida es triunfo; pero hay otras cosas, también es contemplación, es amor, es placer, una vida armónica es una vida sabia; la vida sabia no es sólo la victoria, es también la reconciliación con nosotros mismos y con el mundo que nos rodea" (Octavio Paz, Escritor Mexicano, Premio Nóbel de Literatura, septiembre 1993. Conferencia en el ITESM)

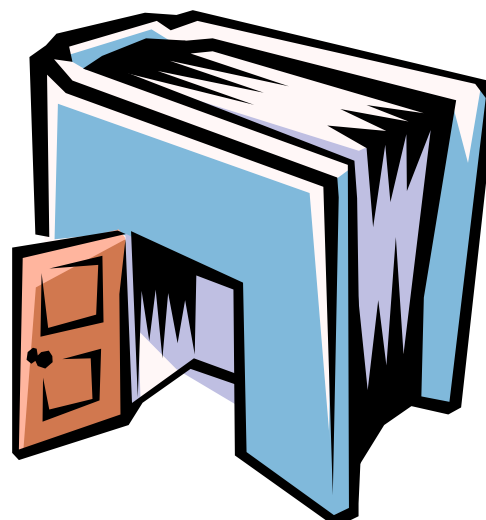
"Mi corazón canta aquí contigo, y canta con alegría porque somos mexicanos, ¿qué esperamos? El sol viene, ya es hora, levántate mexicano y habla con la verdad, nuestra raza es esplendorosa" In Mexikayotl aik'ixpolovitz (La Mexicanidad nunca perecerá)

"La única diferencia entre una persona exitosa y una mediocre es su mentalidad, SU ACTITUD. Mientras la exitosa es alegre, optimista y positiva, la otra es totalmente negativa, ya que en lugar de apreciar la luz que lo ilumina mejor busca la oscuridad para ocultar sus talentos"



MOTIVACIÓN Significa motivar a la acción, es decir, dar motivos para que las personas aprendan, realicen, ejecuten o hagan algo. **Sólo las personas motivadas y participativas pueden aprender.** La motivación es una **fuerza personal e interior** que hace que tengamos éxito en cualquier cosa que nos propongamos.

"Sólo las personas que tienen el amor, la alegría y motivación suficiente, logran el éxito en la vida"
Nantúnez.

COMO APROVECHAR
ESTE LIBRO

Bienvenido estimado lector. Gracias por adquirir un libro diferente para personas que desean ser exitosas en matemáticas y en todas las demás asignaturas. Pero, para tener éxito tenemos que estar dispuestos a **esforzarnos y dedicar el tiempo suficiente para lograrlo.** Aquellos que no estén dispuestos a esforzarse para tener éxito, pueden abandonar su lectura, ya que nadie sin esfuerzo y dedicación puede triunfar en cualquier cosa que se propongan. Lo que obtienes sin esfuerzo, aunque lo obtengas, no vale la pena.

El éxito en matemáticas y de todos los demás estudios depende de que sepas leer y escribir correctamente. Por ésta razón, en la Secundaria y el Bachillerato las materias más importantes son: Matemáticas y Taller de Lectura y Redacción (Español). También, constituyen la base de toda Carrera Profesional. Lo anterior, debido a que necesitas leer y escribir *correctamente* para ser un buen estudiante y después un profesionista triunfador. **Como debes saber, la educación se comienza, pero no se completa en las escuelas, aprendemos de por vida, cosas buenas o malas, pero es la lectura correcta la que nos permitirá aprender lo que las escuelas y colegios no fueron capaces de inculcarnos.**

Si no sabes leer se te dificulta aprender. Es increíble que muchos estudiantes de secundaria, bachillerato, licenciatura o incluso profesionistas no saben leer *correctamente*. Muchos de mis alumnos de Bachillerato y de Ingeniería, se molestan conmigo porque les digo que no saben leer, pero se quedan asombrados cuando los pongo a leer y se los compruebo. **Ya que leer no significa nada más pronunciar o seguir con la vista las palabras, significa entender y comprender al mismo tiempo que lees.**

Para empezar a leer correctamente te recomiendo el libro: *“Como leer*

un libro”, cuyo autor es Mortimer J. Adler, Editado por el Instituto Politécnico Nacional, SEP, México, 1992. Aprender a leer correctamente, no es algo muy fácil y rápido; **No**, es algo que requiere esfuerzo, tiempo y dedicación.

Para que empieces a leer correctamente, te recomiendo que siempre que leas realices las acciones siguientes:

Al leer debes respetar los signos de puntuación, acentuación y admiración e interrogación, es decir, hacer una pausa en cada coma, una pausa mayor en un punto y coma, mayor en un punto y seguido y aún mayor en un punto y aparte. Detente y trata de captar el mensaje. **De reojo vuelve a mirar las frases anteriores y escribe en un cuaderno las ideas principales que captas de cada párrafo. Modula la voz en cada signo de admiración e interrogación que encuentres.**

Si lees, debes pronunciar correctamente las palabras, respetando los acentos. Debes darle entonación, dependiendo del signo de admiración o interrogación utilizado. También, debes conocer el significado de todas las palabras que entran en el

párrafo, ya que palabra cuyo significado no conozcas, palabra que necesitas investigarla en el diccionario.

Muchos creen que leer rápido es leer bien; cuando se tiene mucha práctica esto es cierto, pero cuando comienzas, entre más lento leas y al mismo tiempo comprendas el significado, es mejor.

¿Cómo me doy cuenta sino sé leer? Cuando no te gusta leer, es porque no sabes leer, esto hace que evites o rechaces la lectura y no la disfrutes, por lo tanto, **también evitas estudiar**. Otros síntomas de que no sabes leer son: **no respetas los signos de puntuación**, pronuncias una palabra por otra y en general, no captas el significado de lo leído y tienes que leer otra vez.

Los gobiernos federal y estatal han puesto en marcha diferentes programas para promover la lectura en nuestro país, debido a que existen muchísimas personas en nuestro país quienes *saben leer y escribir* y, sin embargo, ni siquiera hojean un periódico; por lo que se les considera **analfabetas funcionales**. Este es el más grande lastre para el desarrollo de la población y para el país; por esto, al poner en marcha el “Año de la lectura”, se busca que los mexicanos en formación educativa, así como quienes se desempeñan en actividades modestas o de

importancia, **sean mejores gracias a la lectura**. La propuesta es “*leer para pensar mejor y ser más capaces de resolver problemas*”.

Para la mayoría de los mexicanos la afición de leer libros no es todavía una costumbre; en promedio al año en México se lee *medio libro* por persona, lo que provoca que la cantidad de *analfabetos funcionales* (que saben y no leen) sea enorme; mientras en Francia leen 12 libros al año en promedio; en México sólo el 3% de la población lee, mientras que en Japón el 92 % de la población lo hace. La corrupción y el analfabetismo funcional son las más grandes causas de pobreza y atraso en el país. Lo único que nos puede sacar de ésta grave situación es la auto capacitación y el autoaprendizaje mediante la lectura correcta.

Si consideramos los criterios normales para decir si alguien es analfabeta, entonces en Holanda habría menos analfabetas que en México, porque todos saben leer y escribir; sin embargo, de acuerdo a los criterios europeos, en Holanda hay más *analfabetos* que en México, puesto que ellos consideran alfabetizada a una persona, no sólo cuando sabe leer y escribir, **sino cuando sabe computación, algún idioma adicional al propio y matemáticas básicas**. Si

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 4

aplicamos éste criterio actual, en México prácticamente la mayoría de la población sería analfabeta y si todavía los que saben leer no leen, esto empeora la situación. Por esto, es necesario que tengamos el hábito de la lectura, de leer al menos una hora diaria; con esto **no sólo aumentaremos nuestra cultura sino nuestra inteligencia y al final nuestros ingresos.**

MALOS HÁBITOS AL LEER

Son los siguientes:

- Mueves los labios o hablas mientras lees.
- Señalas los renglones con los dedos mientras lees.
- Vuelves a leer porque consideras que no captaste lo leído.
- Ves las palabras como partes aisladas y no como parte de un todo.
- No identificas las ideas principales y secundarias de los párrafos.
- Lees demasiado lento.
- No te concentras en la lectura.
- Mueves mucho los ojos y la cabeza al leer.
- Lees con música o la televisión encendida.
- Cambias una palabra por otra y no la investigas en el diccionario.

Para poder leer bien, es necesario quitar estos malos hábitos.

RECOMENDACIONES PARA LEER CORRECTAMENTE:

- No muevas demasiado la cabeza al leer. Procura mantener fija la vista sobre el párrafo que estás leyendo.
- Concéntrate en la lectura y no te distraigas mientras lees.
- Capta la idea principal de cada párrafo. **Identifica las palabras e ideas claves del párrafo.** Subráyalas o resáltalas con un marcador. Escribe las ideas principales y secundarias en un cuaderno.
- Investiga en el diccionario el significado de las palabras que te sean desconocidas.
- Lee sólo cuando estés motivado para hacerlo. Es decir, sólo cuando de verdad quieras aprender.
- Los libros técnicos léelos más despacio y realiza los ejercicios propuestos. **Pues todo lo aprendemos sólo cuando lo hacemos o ponemos en práctica.**
- Primero hojear todo el libro para ver su contenido y después léelo detalladamente.
- Participa activamente al leer, es decir, debes cuestionar, criticar, dudar, resolver, aceptar ideas, rechazar otras, valorar, juzgar y, comparar en otros textos los mismos temas. Si piensas que algo está mal, debes proponer soluciones alternas.

- Debes formar en tu mente imágenes de lo que lees, es decir, la lectura debe aumentar tu imaginación. Por ejemplo, si nos describen un hermoso paisaje, debemos imaginarlo con todos sus elementos descritos.
- Utiliza un marcatextos para resaltar las ideas más importantes de cada párrafo. Si no quieres usar uno, entonces puedes subrayarlas con un bolígrafo o un lápiz.
- Elabora una ficha bibliográfica del contenido de cada unidad o capítulo. Utiliza un cuaderno donde conserves el resumen de todo un libro.
- Utiliza lentes sino tienes buena vista.

La lectura correcta de buenos libros no es un don natural, más bien es algo que se puede adquirir. Leer bien está íntimamente relacionado con pensar bien. El pensamiento es el que pone en contacto el conocimiento con la sabiduría. La sabiduría no es más que conocimiento destilado, es la unión de muchos conocimientos pequeños. La lectura y los libros son como alambiques donde se destila la sabiduría.

Aprende, pues, a leer. Cuando leas un libro procura que tu mente esté en actitud de simpatía con el autor. Por eso, lee la primera página titular pues así empezarás a conocerlo. Luego lee el prefacio,

introducción o presentación. Allí aprenderás porque escribe el libro y que se propone. Esta es la puerta de entrada y una persona educada tiene que entrar por ella. Ya en el interior del libro, lee conscientemente, con sabiduría, de manera sistemática y con una mente más activa que pasiva. Concéntrate.

Al ir leyendo, marca los pensamientos que más te gusten, los que más te impresionen o los que más te instruyan. Después de terminar de leer el libro, vuelve a leer las partes marcadas y encontraras nuevas lecciones. Un libro será necesario leerlo varias veces para aprenderlo, ya que no es suficiente con una sola vez.

Deja que el libro sacuda tu mente con sus mensajes. Procura captar todos los pensamientos del autor. Medita en esos pensamientos, es decir, sacude la paja para encontrar el grano. Analiza sus argumentos si argumenta, y no aceptes sus conclusiones si te parecen erróneas. No creas todo lo que dice sin investigarlo o comprobarlo en otras fuentes. A medida que vas leyendo permite que las palabras del autor te induzcan a la reflexión. Lee libros de autores reconocidos, que han permanecido al paso del tiempo.

Para leer correctamente, es importante que comprendas lo que son los conceptos y las

definiciones, ya que sólo podemos aprender **conceptos** y no “rollos”. Los conceptos son las joyas o diamantes de la ciencia y el aprendizaje de varios conceptos hará que seas sabio.

CONCEPTO Y DEFINICIÓN

Debido a que a la escuela vamos a aprender ciencia, es necesario saber que ésta se forma por los conocimientos científicos de las diferentes ramas, como son: matemáticas, física, química, biología, etc.; Sin embargo, los conocimientos a su vez se forman por **conceptos y definiciones**, de ahí la importancia de entender el significado de cada uno de ellos, ya que esto es lo que más contribuye al aprendizaje de las ciencias.

Nuestro cerebro a pesar de que es muy poderoso, no puede aprender conocimientos, pues solo puede aprender conceptos. **Cuando aprendes conceptos, es cuando verdaderamente aprendes.** Cuando tienes el concepto, has aprendido y entonces puedes aplicar tus conocimientos. En la escuela no nos enseñan a aprender conceptos, por eso todo lo que hemos “aprendido” lo olvidamos, pero el día que empecemos a aprender conceptos, ese día

realmente empezaremos a aprender y después a aplicaremos lo aprendido.

El **concepto** es una **idea** acerca de algo, en donde hemos identificado sus **propiedades únicas y esenciales**. Como son ideas, los conceptos están en la mente de los individuos. Las **definiciones** son la expresión *material* de los conceptos, ya que una definición es la descripción de un concepto utilizando el **lenguaje –hablado o escrito--**. *La definición es el concepto hablado o escrito.*



Mucha gente confunde el concepto con la definición, ya que casi son lo mismo, de hecho, su única diferencia es que los conceptos están en nuestra mente, los cuales se convierten en definiciones cuando expresamos lo que

sabemos o lo que pensamos mediante el **lenguaje**. Por lo anterior, el lenguaje se constituye en el instrumento fundamental del aprendizaje, de hecho, mientras mayor y abundante sea nuestro léxico, más fácil será aprender; por el contrario, mientras más pobre sea nuestro lenguaje más problemas tendremos para aprender. **La lectura es la única forma de enriquecer nuestro lenguaje y de aumentar nuestra inteligencia**; pues esto nos facilita el aprendizaje de cualquier rama de la ciencia, en especial de las matemáticas.

Si a mis alumnos les pregunto ¿Los libros tienen conocimientos? Su respuesta es sí, la cual es incorrecta, ya que los libros no tienen conocimiento, sólo tienen información, la cual el lector activo al **comprenderla** la convierte en conceptos y luego en conocimientos.

De acuerdo al diagrama de la página anterior, los conocimientos científicos son conceptos y estos sólo están en las mentes de las personas y no en los libros. ¿Cuando se ha oído que un libro *hubiera perdido el conocimiento*?

En cada concepto o definición busca las palabras fundamentales; es decir, aquellas palabras **únicas y exclusivas** que si las quitas, entonces deja de tener validez el

concepto. Por ejemplo, si te pregunto ¿Qué es una silla? Probablemente me contestarías que es algo que sirve para sentarse; pero esto no es exclusivo de la silla, ya que para esto también sirve el sillón, el banquito o el sofá.

Al definir un concepto debes decir las **características o funciones únicas y exclusivas del objeto y que no tienen los demás objetos o cosas**. Por ejemplo, lo exclusivo de la silla es: que es un asiento con 4 patas y respaldo, en el que sólo puede sentarse una persona; es decir, la silla tiene respaldo, el banco no; tiene 4 patas, el sillón no; sirve para que se siente una sola persona, el sofá no. Para comprender el concepto debemos diferenciar y aislar lo que queremos aprender.

Ahora, si te pregunto ¿Qué es una mujer? La mayoría de las personas incluso mujeres no pueden definirla. ¿Por qué? Pues, porque no estamos acostumbrados a aprender conceptos y por eso no somos observadores ni detallistas, ya que la educación actual es *memorista y repetitiva*, se basa en la *acreditación* –la obtención de un documento-- no en el aprendizaje. Entre mejor le repitas las definiciones a un maestro, hasta con puntos y comas, mejor calificación te pone, ya que está calificando tu memoria pero no tu aprendizaje. Por lo anterior, los alumnos no estudian para

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 8

aprender sino para aprobar, no les importa cómo, ya sea copiando o comprando calificaciones, lo que les importa es aprobar jamás aprender, por esto se preparan *memorizando* un día antes o el mismo día del examen. Tal parece que la educación actual consiste en que los conocimientos no pasen ni se queden en la mente de los alumnos ni de los maestros. Esto explica el fracaso de la educación en México, tal como durante los últimos 10 años lo he comprobado al recibir en el bachillerato a los egresados de secundaria y en la Facultad de Ingeniería a los egresados de bachillerato, en ambos casos los alumnos no se saben ni las tablas de multiplicar, ni las operaciones aritméticas con enteros o con fracciones, mucho menos las operaciones algebraicas. Tampoco saben leer ni escribir, tal parece que no pasaron ni por la primaria ni por la secundaria. Esto no es culpa total de los alumnos, lo que pasa es que no aprendieron basándose en los conceptos. Los últimos lugares en educación a nivel mundial obtenidos por México confirman lo anterior, esto a algunos nos avergüenza pero también nos preocupa, ya que mientras la enseñanza en las escuelas siga igual como hasta ahora, es decir, que no enseñe a aprender, a pensar y a resolver problemas, sólo estaremos formando mejores fracasados que no cumplirán con los requisitos mínimos que demanda el mundo

tecnológico y globalizado en el que vivimos y por lo tanto no obtendrán empleo aunque tengan una carrera profesional.

Regresando a la pregunta anterior, algunas mujeres me contestan que la mujer tiene aparato reproductor, pero les contesto que algunos mamíferos también, que da hijos, les digo que los mamíferos y otros animales también, que tiene pechos y amamanta a sus crías, les contesto que los mamíferos también; entonces ¿Qué es lo único y exclusivo de la mujer? La respuesta consiste en decir que es un *ser humano racional*, con esto descartamos a todos los animales, sin embargo, el hombre también es humano y racional, por lo que sólo debemos establecer las diferencias entre el hombre y la mujer, para identificar sus propiedades únicas y exclusivas, por ejemplo: su feminidad, que menstrúa desde la adolescencia hasta la menopausia, que es indispensable para reproducir y conservar la raza humana y que es la compañera ideal del hombre. Todos estos últimos detalles estarían formando parte de la definición de mujer. C u y a s c a p a c i d a d e s y potencialidades son iguales y en ocasiones superiores a las de los hombres.

Como ves al principio es difícil aprender a pensar en conceptos y definiciones, ya que nunca nos han enseñado a pensar de esa manera,

pero es la única forma de aprender realmente. Siendo **observadores, detallistas y críticos** es más fácil distinguir lo exclusivo y único de cada concepto. Al identificar los detalles, se nos quedará mejor grabado y más firmemente en nuestro cerebro y por lo tanto será un **aprendizaje nuestro**, y no será necesario pedirselo prestado a los libros, a los apuntes o a los maestros. Recuerda, que la **observación** –ver detalladamente– es el primer paso del *método científico* y por lo tanto del aprendizaje de la ciencia, además, es el único método aceptado para producir ciencia.

Por ejemplo, si te pregunto ¿qué es un limosnero? Probablemente responderás que es una persona que pide limosna, porque eso es lo que vemos y escuchamos alrededor de nosotros, pero te sorprenderá saber que limosnero es aquella persona que da la limosna o caridad a otra persona, que en la corte de los reyes hispánicos disponían de limosneros quienes distribuían no solamente la limosna sino también las sobras de la mesa real. A las personas que piden limosna se les debe llamar mendigos o pordioseros.

Los conceptos y definiciones forman los conocimientos científicos, que se supone debemos aprender en la escuela, sin embargo, éstos sólo se aprenden por sus **detalles**, no por el “rollo”

que les acompaña. **Las matemáticas es la ciencia que más atención y concentración demanda**, es la que más requiere que aprendamos al detalle, probablemente por esto la gente piensa que son difíciles, afortunadamente todos sus reglas o leyes son muy simples y cortas, por ejemplo, “*al multiplicar o dividir, signos iguales da positivo y signos distintos da negativo*”. Es necesario observar que al enunciado anterior se le llama *ley de los signos* y sólo la utilizaremos en la multiplicación y división, pero jamás en la suma y resta.

Si a mis alumnos les pido el concepto de lápiz, todos contestan que sirve para escribir; pero esto no es exclusivo del lápiz, ya que también podemos escribir con el bolígrafo, la pluma fuente, el plumón, el dedo; la escritura no es exclusiva del lápiz y por lo tanto no lo define. Tampoco lo es que es de madera, ya que hay lápices de plástico; que tiene borrador, no pues hay lápices que no tienen borrador y no por eso dejan de ser lápices. Lo único del lápiz es que tiene grafito, lo cual nos permite escribir y borrar lo escrito. Pero, los portaminas también usan minas de grafito, pero esto es así, porque los portaminas son la versión más moderna de los lápices, pero podemos considerarlos como tales pues hacen uso del grafito. En el diccionario Océano encontramos que lápiz es “Barrita de grafito

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 10

envuelta en madera” entre otras definiciones.

Durante todo el estudio de este libro y de cualquier otro, te recomendamos que seas observador y detallista, que te fijas en los detalles, ya que ahí está el aprendizaje. La mayoría por eso no aprende, porque pasa por alto los detalles, los conceptos y sólo en ellos está el aprendizaje.

Cuando tienes el concepto, tienes el conocimiento y lo puedes aplicar. Por ejemplo, si definimos la tecnología como *la ciencia aplicada a la vida real*. Si alguien te pregunta ¿Los griegos tenían tecnología? La respuesta es si. Aunque si le haces esa pregunta a cualquier persona, te contestará que no, ya que consideran que la tecnología inicia con las computadoras hasta nuestros días. Sin embargo, los griegos aplicaron la ciencia que poseían a situaciones de la vida real: balanzas, palancas, lentes y espejos entre otros. Por lo tanto, **si tenían tecnología**. Nota que cuando tienes el conocimiento, lo puedes **aplicar** al pasado, presente y futuro; también lo puedes aplicar a otras áreas del conocimiento. En esto consiste el verdadero aprendizaje, en que lo puedes aplicar.

Supongo que sabes leer pero a un nivel básico únicamente. ¿Por qué afirmo esto? Por que si supieras

leer correctamente no tendrías problemas con las matemáticas, **ya que aprender a leer bien es más difícil que aprender matemáticas**, además, de que saber leer es un requisito para aprender cualquier tema o asignatura.

Por esto, si deseas beneficiarte de la lectura de este libro y de cualquier otro, **primero debes leer correctamente**. El requisito básico para aprender es que sepas comprender el significado de lo que lees y escuchas. Al leer, escucha al autor como si mediante el libro te hablara. **Es importante que leas con mucha atención y concentración**, ya que sin esto podrías leer varias páginas sin captar nada. **Necesitas ser lector activo** y no uno pasivo. **Recuerda que se aprende haciendo**. En el caso de matemáticas: **resolviendo problemas**. En realidad, la acción es la manifestación del aprendizaje. **El aprendizaje sin acción no es aprendizaje verdadero**. Otra manifestación de que estás aprendiendo será tu **cambio de conducta o actitud**.



El presente libro es un método de auto estudio, su finalidad es que aprendas por tu cuenta y sin ayuda de un maestro, por esto, está dividido en unidades, con objeto de facilitarte su lectura y no te sea muy tedioso o aburrido. **Pero, cuando empieces a leer el libro, es necesario que lo hagas al menos una unidad por día**, en orden creciente, realizando las actividades o ejercicios establecidos; también, es indispensable que no dejes de estudiarlo hasta concluirlo, ya que si el conocimiento no lo alimentas, se desvanece, es más, para mejores resultados te recomiendo repasarlo completamente una o dos veces más. La dedicación y constancia es lo que te hará llegar al éxito, ya que **el que persevera alcanza**.

ACTIVIDADES A REALIZAR

Durante todo el estudio de este libro usarás un cuaderno profesional, para anotar las respuestas y las ideas principales

y resolver todos los ejercicios.

Contesta sinceramente las preguntas siguientes:

1. ¿Qué mensaje te da Octavio Paz?
2. ¿Te gusta leer?
3. ¿Por qué no lees diariamente?
4. ¿Por qué es importante leer correctamente?
5. ¿Has identificado tus malos hábitos al leer? Escribe los.
6. ¿Cómo puedes quitar esos malos hábitos?
7. ¿Cuándo lees haces pausas en los signos de puntuación?
8. Escribe con tus palabras lo que entiendes por **concepto** y **definición**. También, investiga en el diccionario esas palabras.
9. Escribe las causas por las que repruebas matemáticas u otras asignaturas.
10. ¿Cómo puedes mejorar tu aprendizaje?

PRUEBA DE ATENCIÓN

¿Cuántas letras f aparecen en el párrafo siguiente?

Your success in your studies will also depend of your motivation. This need or desire to achieve a certain goal can make the difference between success and failure. Motivation can come from two sources: from inside of you o from outside of you. In the first case,

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 12

motivation come from your hopes and expectations, from your desire to do something or to be someone.

Respuesta: Son 12 letras f. *No avances hasta que puedas contar todas las efes.*

“Los libros son los mejores amigos que podemos tener en la vida” Nantúnez

Mis alumnos me preguntaron si para aprender matemáticas se necesita inteligencia, una gran posición económica o unos grandes antepasados. Les respondí que no, por lo que ellos me pidieron que les contara acerca de mi árbol genealógico; por esto a continuación te narro la biografía de mis antepasados, la cual a su vez constituye una **prueba de lectura**, ya que si al leerla te ríes mucho entonces sabes leer, si no ríes entonces debes aprender a leer correctamente.

AUTOBIOGRAFIA

Mis apellidos son Peres Coimbra. Mi primer apellido no está mal escrito ya que su origen es portugués, aunque en español se escribe Pérez y generalmente no es un apellido muy noble que digamos, ya que al ayudante en una oficina despectivamente le llaman “Peritos”, o a veces,

“Lopitos” o “Gutierritos”.

Nuestro antepasado más remoto de quien se tiene memoria, nació en Lisboa, Portugal y se llamaba Agapito Peres Ovando, su nombre fue muy famoso y comentado en las reuniones de la época.

Agapito tendría 30 años, cuando se dirigió a una de las playas más aristocráticas de Portugal, llamada vulgarmente *presidio de Nueva Aventura*, donde después de un tiempo, muchas personas presenciaron su repentina muerte en ese lugar de recreo.

Su descendiente directo fue Clemente Peres, quien tenía mucho sentido del humor, se divertía colocándose en los caminos de Oporto, Portugal, para saludar con un sable en la mano a los caminantes y quitarles un peso de encima. Como sus diversiones eran muy originales, sino aceptaban el saludo o no colaboraban entregando sus pertenencias, entonces los obligaba con su sable para que accedieran.

Parece que la perfección artística de su obra llamó la atención pública más allá de lo conveniente. Algunas autoridades del ramo y que habían tenido conocimiento de los rasgos humorísticos de Clemente, lo espionaron y se apropiaron de su persona mientras llevaba a cabo una más de sus bromas.

Los representantes de esas autoridades recibieron la orden de separar la cabeza de Clemente, para ponerla en lo alto de la plaza central como un ejemplo para los demás habitantes, quienes se congregaban diariamente para ver dicha cabeza, haciendo que Clemente ocupara uno de los lugares más altos, quien nunca antes en su vida había estado en un lugar tan destacado.

Posteriormente, en el siglo XV, floreció Peres el Hermoso, también llamado *el letrado o la Pluma de Oro*. Tenía una habilidad insuperable para imitar la letra y firma de todos los comerciantes de aquel país. La gente se moría de risa al ver como sacaba provecho de ese don en el que alcanzó tan notable perfección.

Desgraciadamente, parece que hubo personas a las cuales no les gustó el arte de nuestro antepasado, por lo que una de esas firmas lo comprometió para servir como picapedrero en una carretera durante un largo período de años, y que la rudeza del trabajo le echó a perder la mano para una obra artística y delicada, como lo era su arte caligráfico.

De vez en cuando dejaba el pesado trabajo de la carretera, pero después lo hacían regresar para que siguiera apoyando. Estuvo mejorando las vías de

comunicación de Portugal durante medio siglo, lo cual hizo que perdiera las facultades para ejercitar el arte con su pluma. Perteneció a la *Orden de la Cadena*, llevaba el pelo muy corto tipo presidiario, porque así le gustaba, demostrando un gusto muy especial por la ropa de tela con rayas, la cual el gobierno se la proporcionaba gratuitamente, como recompensa de sus servicios a la patria.

Pasados ciertos años, nuestra familia se engrandeció con el glorioso nombre de Inocente Peres, el cual viajó a América en compañía de Colón, como un simple pasajero de su carabela.

Aunque era de un temperamento duro, sería imposible negar los buenos instintos de mi antepasado. Él fue el primero que trabajó por la disciplina y superación de los habitantes de América, ya que construyó una enorme cárcel y puso enfrente una horca. Aunque no está muy claro, parece que debido a sus variadas y convincentes maneras de educar con el látigo a los indios, cuentan que un día, al ir a ver el funcionamiento de la horca, por un accidente voluntario de parte de los indios, Inocente quedó colgado de ella. A él le corresponde el honor, de ser el primer blanco que se mecía bajo las brisas americanas, con el cuello amarrado al extremo inferior de una cuerda europea. La

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 14

cuerda al parecer le causó lesiones en el cuello, muriendo a los pocos instantes de colgado.

Uno de los descendientes de Inocente Peres, fue Juan Peres Morgan, mejor conocido como el “Pirata Morgan”, marino igual que su padre, se le conocía en muchos países con el nombre de *Almirante*. Comandaba embarcaciones muy rápidas. La velocidad de las naves era esencial para desempeñar correctamente su trabajo. También, se preocupaba mucho por llevarlas bien provistas y armadas de muchos cañones, carabinas y armas de abordaje.

Juan Peres Morgan prestó grandes servicios a la navegación y ayudó a que se desarrollara la marina mercante, ya que hizo que las embarcaciones que él perseguía las hicieran más veloces, ya que si perseguía alguna y esta se atrasaba, el Almirante sufría un ataque de rabia y castigaba a la nave atrasada llevándosela con él. Conservaba el navío, con su tripulación y cargamento, en espera que los dueños reclamaran sus pertenencias; pero dichos dueños eran tan indolentes que no iban a reclamar los bienes de su legítima propiedad, no quedándole más remedio que apropiarse de ellos para que no se desperdiciaran.

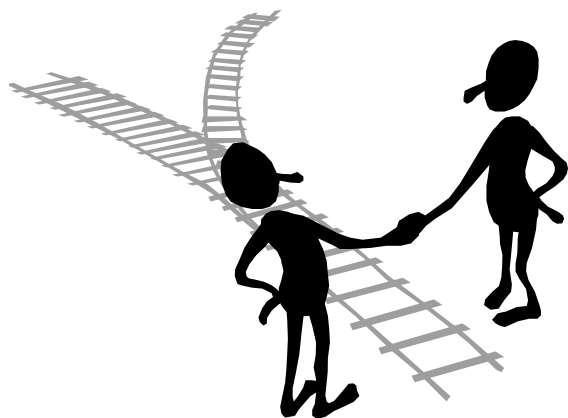
Desgraciadamente, en una carrera de barcos, un navío del gobierno le

jugó una broma al barco de nuestro antepasado y lo hundió de un cañonazo, atrapando al Almirante, al cual por perder el juego se le castigó colgándolo de una cuerda, cuyo fino cuello no pudo resistir y murió de asfixia. Así terminó una de las glorias de la navegación, quien con sus servicios contribuyó más que ningún otro al desarrollo del comercio marítimo.

Estos son algunos de nuestros antepasados más notables, pueden ver que la mayoría de los Peres Coimbra murieron colgados, otros murieron en sus camas, de muerte natural, lamentados por sus compañeros de presidio.

Mis alumnos me pidieron ayuda debido a que tienen problemas con la asignatura de matemáticas, pues históricamente a las matemáticas se les ha asignado una mala fama de “*terribles, duras, difíciles, aburridas, inútiles*”, es tan fuerte esta mentira que hasta los **malos** maestros así creen que son y así se las hacen sentir a los estudiantes; nuestros antepasados así creían que son las matemáticas, nuestros vecinos y nuestros amigos también así piensan que son, los autores de libros también presentan las matemáticas como frías, rígidas, inflexibles y casi todo el mundo ha creído en esta “*falsa publicidad*”. En este capítulo te presentaré la belleza e importancia de las matemáticas, **para que las**

conozcas como verdaderamente son.



LA IMPORTANCIA DE LA LECTURA Y EL APRENDIZAJE

El primer requisito para aprender es saber leer correctamente. Porque sino entiendes lo que te dicen en la teoría o lo que te piden en un problema ¿cómo podrás aprender?

El aprendizaje no puede darse en la pasividad –por no decir *flojera*–, menos en matemáticas, más bien es una participación totalmente activa, es una búsqueda personal que nace de las propias motivaciones, ya que nadie puede aprender por ti. El aprendizaje es personal --a pesar de que surja en ambientes sociales--, nace dentro

de cada persona y depende del propio interés y tiempo que le dediquemos.

Aprendemos con el corazón, aunque algunos dicen que con el cerebro –yo considero que usando los dos--, así que sin amor ni entrega no podremos aprender. **Muchos quieren aprender, pero sólo lo logran quienes entregan todo su ser en esta tarea.** Si te entregas parcialmente al aprendizaje, entonces se te hará difícil y no lograrás el éxito. En pocas palabras, como dice Guillermo Michel “*Aprendemos con el corazón o no aprendemos*”.

Aprender se concibe como **una búsqueda personal, laboriosa y exigente**, que nace de la propia **responsabilidad** dentro de cada individuo. Pero, dicha búsqueda nunca termina ya que el conocimiento es inagotable, por esta razón, toda nuestra vida seremos estudiantes o aprendientes. Por lo anterior, debemos tener la capacidad de ser autodidactas, es decir, de **aprender a aprender**, de manera tal, que seamos autosuficientes para aprender independientemente de la escuela y de los maestros. Debemos aprender para la vida y no para ciertos momentos de evaluación escolar: **exámenes**.

Por todo lo anterior, resulta obvio insistir que este libro sólo es un auxiliar del aprendizaje, pues la

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 16

parte más importante se encuentra dentro de cada uno de sus lectores, **exactamente dentro de ti: en tu interés, en tu disposición, en tu motivación y en tu responsabilidad.**

Quien se aventura con el corazón en el camino del aprendizaje, conocerá dudas, temores e incertidumbres. Aprender es cambiar y nada causa más pavor que un cambio. Sobre todo cuando éste afecta nuestros hábitos, nuestras costumbres, nuestros valores, nuestra concepción del mundo y de la vida. Por tal motivo, el **miedo** es el primer enemigo del conocimiento. Sin embargo, si deseamos aprender a aprender, tendremos que cambiar, y, para ello, será necesario vencer el miedo a aprender. Más el miedo sólo se vence con coraje y decisión.

Aprender a aprender requiere una dosis enorme de **esfuerzo y dedicación**, de la búsqueda personal de la verdad, de la reflexión crítica sobre todo lo que se nos presente como verdad absoluta. Debemos aprender de todo lo que nos rodea y no sólo en la escuela.

Entendemos el aprendizaje como: *“El proceso mediante el cual se obtienen nuevos conocimientos, habilidades o actitudes, a través de **experiencias vividas** que producen algún cambio en nuestro modo de ser o actuar “.* Nota que el

aprendizaje es necesario **vivirlo, participar en él**, de forma tal que lo incorporemos en nuestra vida. Lo aprendido no lo aprovechamos sino lo asimilamos y utilizamos, similar al alimento que comemos, no nos nutre sino es asimilado por nuestro cuerpo.

Aprendemos por imitación, por comparación, por ensayo y error, por comunicación y contacto. En esta última, está incluida la enseñanza. Lo anterior significa, que aprendemos de diversas maneras, por lo que es necesario intentarlo todo. No sólo aprendemos en la escuela y en ocasiones resulta ser el peor lugar para aprender. *Tienes que arriesgarte al fracaso para lograr el éxito. Quien no arriesga no gana. **Aprendemos más de los errores que de los aciertos.***

La motivación es la fuerza interior que necesitamos para lograr el éxito. Todo aprendizaje requiere de esa fuerza, pues si hay interés el aprendizaje se hace más participativo, más efectivo, más entusiasta. Voluntariamente debemos aprender, ya que **sólo el que quiere aprender puede aprender, sino quieres jamás aprendes.** Si realmente deseas aprender, dentro de ti encontrarás la fuerza, el impulso, el estímulo que te moverá a hacer realidad tus deseos.

LA LECTURA CORRECTA

La lectura correcta es vital para la vida; es un instrumento básico para vivir bien y disfrutar de la vida. Es el mejor instrumento para lograr tus propósitos materiales en la sociedad, tales como fama, reconocimiento social, fortuna, posición social, etc.; ¿Deseas obtener lo anterior? Si tu respuesta es sí, entonces aprende a leer correctamente y practica muchísimo, ya que la lectura se forma únicamente con hábito, practicando diariamente. La lectura significa dinero, pues quien sepa leer correctamente puede aprender lo que sea estudiando libros o manuales técnicos, siendo capaz de poder desempeñar cualquier oficio o de crear tecnología.

La lectura cultiva a la persona, pero necesitas alimentarte a diario al igual que las plantas para no morir. La lectura da conocimientos y cultura; las personas cultas son las que saben leer bien y lo hacen constantemente. *Al cerebro lo alimenta la lectura*; si comemos a diario, a pesar de que ya comimos ayer y alimentamos nuestro cuerpo todos los días, ¿por qué no alimentar diariamente a nuestro cerebro? que es la parte más valiosa que poseemos. *Recuerda que el dinero no está en nuestros bolsillos, sino en nuestra mente.*

Cuando yo digo que la lectura nos puede enriquecer económica e intelectualmente, me refiero a que no hay otro camino de superación *accesible* a cualquier persona. La superación personal empieza por la lectura y escritura correcta y después por una educación profesional.

Los enemigos naturales de nuestra superación lo constituyen la ***diversión y los vicios***, unidos a una ***mentalidad pesimista*** debido a una ***baja autoestima***, la cual jamás nos dejará progresar en ningún aspecto de nuestra vida.

Considero que la lectura y por lo tanto el aprendizaje y capacitación, constituyen lo único que puede sacar adelante al país. No existe otro camino. De hecho, pienso que la crisis de México, se debe a que el 90 % de la población no sabe leer ni escribir *correctamente*. ¡Increíble!, Aunque las cifras oficiales dicen lo contrario. ¿Por qué esto es así? *Porque leer no significa nada más pronunciar las palabras o seguirlas con la vista, ¡No!, Significa comprender el mensaje al mismo tiempo que lees.*

En mi práctica docente, me he encontrado que mis alumnos de bachillerato y de carreras profesionales no saben leer; es más, muchos maestros y profesionistas tampoco --sobra decir que son mediocres-- e incluso

gente que tiene postgrado tampoco sabe leer.

Tal parece que la educación actual, **que no exige y no enseña**, nos prepara para ser unos mejores fracasados; ya que los alumnos no quieren trabajar ni esforzarse, sólo quieren divertirse y lo que menos quieren son clases o hacer tareas; por otro lado, el maestro quiere llevársela tranquilamente y tampoco quiere enseñar ni que los alumnos aprendan, así que para evitarse problemas aprueba a los muchachos sin merecerlo o les deja trabajos para que aprueben. ¿Será este el camino del éxito? ¿Será ésta la escuela del éxito? Este es uno de los grandes problemas que enfrenta el país, ya que son pocos los maestros que verdaderamente cumplen su importante papel, la gran mayoría no lo cumple, algunos porque son mediocres y no conocen lo que enseñan y otros porque son flojos o viciosos. La mayoría de los maestros no tienen ni idea de lo importantísimo que es su labor, de ahí que no la cumplan, sólo trabajan de maestros por cobrar un salario pero no por vocación; ya que para ser un maestro en toda la extensión de la palabra se requiere vocación y entrega.

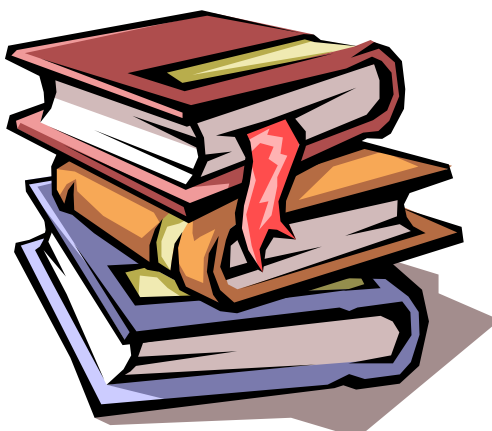
Afortunadamente, en un futuro no muy lejano, ya no se necesitaran escuelas –algunos las consideran el peor lugar para aprender--, tampoco se requerirán maestros –

al menos como los conocemos--, más bien las clases serán a distancia mediante Internet y la Televisión. Por ejemplo, yo estudié mi maestría y actualmente estudio mi doctorado por Internet. Cuando lo anterior suceda, se necesitaran alumnos que quieran aprender y que sepan leer correctamente, que se auto capaciten y les gusten los buenos libros, las matemáticas y la computación, pero sobre todo, que sepan usar la tecnología, principalmente la computadora y sus programas, entre ellos los tutoriales, que son programas que enseñan verdaderamente a lograr aprendizajes significativos en los alumnos –de hecho son los nuevos maestros. Quien no se prepare ni capacite no encontrará trabajo, ya que hasta para ser intendente se pide bachillerato.

ACTIVIDADES A REALIZAR

1. ¿Por qué es importante la motivación?
2. ¿Por qué es importante la lectura?
3. ¿Por qué es importante tener una autoestima alta y positiva?
4. ¿Cuáles son tus características más valiosas?
5. ¿Por qué es importante ser alegre y tener una actitud optimista?
6. ¿Por qué no aprendes sino entregas todo tu ser a esa tarea?

7. ¿Por qué todo lo valioso requiere esfuerzo y dedicación?
8. ¿Puedes aprender sino quieres?
9. A que le atribuyes que no hayas aprendido correctamente lo que te enseñaron en la escuela.
10. ¿Qué puedes hacer para mejorar tu aprendizaje?
11. ¿Qué estas dispuesto a aportar para mejorar tu aprendizaje?



UNIDAD IV

PRUEBA DE LECTURA

Te invito a que pruebes si sabes leer realizando la siguiente lectura y contestando el cuestionario.

GALILEO

El italiano Galileo Galilei, es considerado como físico, ya que fue el primero en experimentar con el

movimiento de los cuerpos y en aplicar el método científico, por lo cual se le considera el “*padre de la ciencia*”. Aunque se saben mucho más cosas que las que se sabían en la época de Galileo, no se ha añadido nada esencial al método. Dicho método, lo basaba en la observación de hechos particulares hasta su comprobación y formulación de leyes generales que explicaran los fenómenos naturales.

Siendo aún muy joven, fue nombrado profesor de matemáticas en Pisa; pero como el salario era miserable, no parece haberse ilusionado con que se esperasen de él grandes cosas. Se divertía buscando ocasiones que pusiesen en ridículo a sus colegas. Estos afirmaban, por ejemplo, -- basándose en la física de Aristóteles --, que un cuerpo que pesase 10 kilos caería de una altura determinada, en una décima parte del tiempo que necesitaría un cuerpo que pesase un kilo. Una mañana subió Galileo a lo alto de la torre de Pisa con dos pesos de 1 y 10 kilos, respectivamente, y en el momento que los profesores se dirigían a sus cátedras, en presencia de los discípulos, llamó su atención y dejó caer a sus pies los dos pesos desde lo alto de la torre. Ambos pesos llegaron prácticamente al mismo tiempo. Los profesores, sin embargo, sostuvieron que sus ojos debían haberles engañado, puesto que era

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 20

imposible que Aristóteles se equivocase.



Después, hizo un telescopio e invitó a los profesores a mirar por él los satélites de Júpiter. Los profesores rehusaron, exponiendo como motivo que Aristóteles no había mencionado dichos satélites, y que, por eso, cualquiera que pensase que los veía debía estar equivocado.

CUESTIONARIO

De acuerdo exclusivamente a la lectura anterior, responde:

1. ¿Cuál fue la primera rama de la ciencia que se creó?
2. ¿En que país se encuentra la ciudad de Pisa?
3. ¿Por qué aparece entre comillas *padre de la ciencia*?
4. ¿Cuál es el primer paso del método científico?
5. ¿Cuál es el último paso del método científico?
6. Si el método científico es el único camino para hacer ciencia ¿Cuál es el objetivo de la ciencia?

7. ¿Ha sufrido cambios el método científico desde la época de Galileo?
8. ¿Cómo eran los conocimientos en la época de Galileo?
9. ¿Cómo era el carácter de Galileo?

Anota tus respuestas y compáralas con las que están al final del capítulo. Si son similares, entonces sabes leer y te felicito mucho; sino es fundamental que aprendas a hacerlo.

Otra de las características importantes de todo estudiante y de un buen profesional, es la **redacción** de informes o trabajos escolares. La redacción no sólo incluye la formación correcta de las oraciones, sino también la escritura correcta de las palabras y el uso adecuado de los signos lingüísticos (de acentuación, de puntuación, de admiración, de interrogación). **Quien no tiene una letra legible y sobre todo una buena ortografía es un mal educado** y esto dice muchas cosas negativas de esa persona, sobre todo, que está mal preparada y que no sabe pensar organizada y correctamente.

En el párrafo siguiente, la mamá de Federico le envía un recado a su maestro, que curiosamente se llama igual que su hijo. Pero como a su mamá se le olvidó poner los signos lingüísticos, Federico le

colocó los signos de manera tal que el mensaje le favorezca y le echa la culpa al maestro.

Coloca los signos de puntuación de la manera como los colocó Federico.

Maestro Federico es un grosero usted lo reprenderá mi esposo sino se corrige le meterá una golpiza para que aprenda a educarse. La última vez no cumplió sus obligaciones usted debe corregirlo mi esposo lo golpeará para que aprenda a cumplir con su trabajo. Maestro Federico es muy inquieto y merece un buen castigo.

El maestro, corrigió los signos de puntuación de manera tal que ahora la culpa es del alumno Federico. Vuelve a escribir el párrafo con los signos de puntuación que escribió el maestro.

Anota tus respuestas y compáralas con las que están al final del capítulo. Si coinciden, entonces sabes redactar y te felicito mucho; sino, es importantísimo que aprendas a hacerlo.

A continuación, aparece otra

lectura Interesante, la cual al final también incluye un cuestionario. Contéstalo y compara tus respuestas con las que están al final del capítulo.

EL HOMBRE QUE CALCULABA

Beremiz, el hombre que calculaba, dijo a Telassim:

-- Cuando miramos, señora, hacia el cielo en una noche en calma y límpida, sentimos que nuestra inteligencia es incapaz para comprender la obra maravillosa del Creador. Ante nuestros ojos pasmados, las estrellas forman una caravana luminosa que desfila por el desierto insondable del infinito, ruedan las nebulosas inmensas y los planetas, siguiendo leyes eternas, por los abismos del espacio, y surge ante nosotros una idea muy nítida: la noción de **"número"**.

Vivió antaño en Grecia, cuando aquel país estaba dominado por el paganismo, un filósofo notable llamado Pitágoras. Consultado por un discípulo sobre las fuerzas dominantes de los destinos de los seres humanos, el sabio respondió: *"Los números gobiernan al mundo"*.

Realmente. El pensamiento más simple no puede ser formulado sin encerrar en él, bajo múltiples aspectos, el concepto fundamental de número. El beduino que en

medio del desierto, en el momento de la plegaria, murmura el nombre de Dios, tiene su espíritu dominado por un número: "¡La **Unidad!**" ¡Sí, Dios, según la verdad expresada en las páginas del Libro Santo y repetida por los labios del Profeta, es **Uno**, Eterno e Inmutable! Luego, el número aparece en el marco de nuestra inteligencia como símbolo del Creador.

Del **número**, señora, **que es base de la razón y del entendimiento**, surge otra noción de indiscutible importancia: la noción de "medida".

Medir, señora, es comparar. Sólo son, sin embargo, susceptibles de medida las magnitudes que admiten un elemento como base de comparación. ¿Será posible medir la extensión del espacio? De ninguna manera. El espacio es infinito, y siendo así, no admite término de comparación. ¿Será posible medir la Eternidad? De ninguna manera. Dentro de las posibilidades humanas, el tiempo es siempre infinito y en el cálculo de la Eternidad no puede lo efímero servir de unidad de medida.

En muchos casos, sin embargo, nos será posible representar una dimensión que no se adapta a los sistemas de medidas por otra que puede ser estimada con seguridad. Esa permuta de dimensiones, con vistas a simplificar los procesos de medida, constituye el objeto

principal de una ciencia que los seres humanos llaman **Matemáticas**.

Para alcanzar nuestro objetivo, **la Matemáticas tiene que estudiar los números, sus propiedades y transformaciones**. Esta parte toma el nombre de **Aritmética**. Conocidos los números, es posible aplicarlos a la evaluación de dimensiones que varían o que son desconocidas, pero que se pueden representar por medio de relaciones y fórmulas. Tenemos así el **Álgebra**. Los valores que medimos en el campo de la realidad, son representados por cuerpos materiales o símbolos; en cualquier caso, estos cuerpos o símbolos están dotados de tres atributos: forma, tamaño y posición. Es importante, pues, estudiar tales atributos. Eso constituirá el objeto de la **Geometría**.

También se interesa la Matemática por las leyes que rigen los movimientos y las fuerzas, leyes que aparecen en la admirable ciencia que se llama Mecánica.

La Matemática pone todos sus preciosos recursos al servicio de una ciencia que eleva el alma y engrandece al ser humano. Esa ciencia es la Astronomía.

Suponen algunos que, dentro de las Matemáticas, la Aritmética, el Álgebra y la Geometría constituyen

partes enteramente distintas: es un grave error. Todas se auxilian mutuamente, se apoyan las unas en las otras, y, en algunos casos, incluso se confunden.

Las Matemáticas, que enseñan al ser humano a ser sencillo y modesto, son la base de todas las ciencias y artes.

Un episodio ocurrido con un famoso monarca yemenita es bastante expresivo y voy a narrarlo:

Assad-Abu-Carib, rey del Yemen, hallándose cierto día descansando en el amplio mirador de su palacio, soñó que había encontrado a siete jóvenes que caminaban por una senda. En cierto momento, vencidas por la fatiga y por la sed, las jóvenes se detuvieron bajo el ardiente sol del desierto. Surgió en este momento una hermosa princesa que se acercó a las peregrinas, llevándoles un cántaro de agua pura y fresca. La bondadosa princesa sació la sed que torturaba a las jóvenes y éstas, reanimadas, pudieron reanudar su jornada interrumpida.

Al despertar, impresionado por ese inexplicable sueño, determinó Assad-Abu-Carib llamar a un astrólogo famoso, llamado Sanib, y le consultó sobre la significación de aquella escena a la que él —rey poderoso y justo— había asistido en el mundo de las visiones y de las

fantasías. Y dijo Sanib, el astrólogo: “¡Señor!, Las siete jóvenes que caminaban por la senda eran las artes divinas y las ciencias humanas: la Pintura, la Música, la Escultura, la Arquitectura, la Retórica, la Dialéctica y la Filosofía. La princesa caritativa que las socorrió era la grande y prodigiosa Matemática”. *“Sin el auxilio de la Matemática – prosiguió el sabio – las artes no pueden avanzar, y todas las otras ciencias perecen”*. Impresionado por estas palabras, determinó el rey que se organizaran en todas las ciudades, oasis y aldeas del país centros de estudio de Matemáticas. Hábiles y elocuentes *ulemas*, por orden del soberano, acudían a los bazares y a los paradores de las caravanas, a dar lecciones de Aritmética a los caravaneros y beduinos. Al cabo de pocos meses se notó que el país despertaba en un prodigioso impulso de prosperidad. Paralelamente al progreso de la ciencia crecían los recursos materiales; las escuelas estaban llenas de alumnos, el comercio se desarrollaba de manera prodigiosa; se multiplicaban las obras de arte; se alzaban monumentos; las ciudades vivían repletas de ricos forasteros y curiosos. El país del Yemen estaba abierto al progreso y a la riqueza, pero vino la fatalidad – ¡*Maktub!*—a poner término a aquel despliegue prodigioso de trabajo y prosperidad. El rey Assad-Abu-Carib cerró los ojos para el mundo

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 24

y fue llevado por el impío Asrail al cielo de Alá. La muerte del soberano hizo abrir dos túmulos: uno de ellos acogió el cuerpo del glorioso monarca y al otro fue a parar la cultura artística y científica de su pueblo. Subió al trono un príncipe vanidoso, indolente y de escasas dotes intelectuales. Se preocupaba por las vanas diversiones mucho más que por los problemas de la administración del país. Pocos meses después, todos los servicios públicos estaban desorganizados; las escuelas cerradas; los artistas y los ulemas, forzados a huir bajo las amenazas de perversos y ladrones. El tesoro público fue criminalmente dilapidado en ociosos festines y banquetes desenfrenados. El país fue llevado a la ruina por el desgobierno y al fin cayó bajo el ataque de enemigos ambiciosos que lo sometieron fácilmente.

La historia de Assad-Abu-Carib, señora, **viene a demostrar que el progreso de un pueblo se halla ligado al desarrollo de los estudios matemáticos.** En todo el universo, la Matemática es número y medida. **La Unidad**, símbolo del Creador, es el principio de todas las cosas, que no existen sino en virtud de las inmutables proporciones y relaciones numéricas. *Todos los grandes enigmas de la vida pueden reducirse a simples combinaciones de elementos variables o*

constantes, conocidos o incógnitos que nos permiten resolverlos.

Para que podamos comprender la ciencia, precisamos tomar por base al número. Veamos como estudiarlo, *con ayuda de Allah, Clemente y Misericordioso.*

¡Uassalan!

Con estas palabras se calló el calculador, dando por terminada su primera clase de Matemáticas.

Por tener tan alto valor en el desarrollo de la inteligencia y del raciocinio. La Matemática es uno de los caminos más seguros para llevar al ser humano a sentir el poder del pensamiento, la magia del espíritu.

La Matemática es, en fin, una de las verdades eternas, y, como tal, lleva a la elevación del espíritu, a la misma elevación que sentimos al contemplar los grandes espectáculos de la Naturaleza, a través de los cuales sentimos la presencia de Dios, Eterno y Omnipotente.

CUESTIONARIO

1. ¿Qué es el número?
2. ¿Qué es medir?
3. ¿Qué es una dimensión?
4. ¿Cuál es el objeto de la Matemática?

5. ¿Qué estudia la Matemática?
6. ¿Qué estudia la Aritmética?
7. ¿Qué estudia el Álgebra?
8. ¿Qué estudia la Geometría?
9. ¿Qué es la Astronomía?
10. ¿Cómo debe ser el ser humano que estudia Matemáticas?

De la Historia del Monarca Yemenita obtén las respuestas a las preguntas siguientes:

1. ¿Qué apariencia le dan a la Matemática?
2. ¿Cuáles son las artes divinas?
3. ¿Cuáles son las ciencias humanas?
4. ¿Cuál es la función de las Matemáticas?
5. ¿Qué rama de las matemáticas dio al país Yemenita gran impulso y prosperidad?
6. ¿Qué es un ulema?
7. ¿Qué es un tûmulo?
8. ¿Qué características tenía el príncipe que sustituyó al Rey Assad-Abu-Carib?
9. ¿Qué fue lo que provocó que el país Yemenita quedara en la ruina?

Compara tus respuestas con las que están al final de este capítulo. Si entendiste la lectura “El hombre que calculaba”, te felicito enormemente, significa que sabes leer, sino fue así, te recomiendo que la leas nuevamente, después de haber leído las reglas para leer

correctamente.

LA LECTURA Y LAS MATEMÁTICAS

El consejo que a los jóvenes da **Bill Gates**, Presidente de *Microsoft®*, la mayor empresa de *software* en el mundo, en una entrevista concedida a *Jacobo Zabłudovsky* es “..... para tener éxito se necesita leer mucho, entre más lean más éxito tendrán” y esto lo dice uno de los hombres más ricos del mundo.



Pocos saben que *Bill Gates* fue un excelente estudiante de matemáticas y ciencias. Sus características principales fueron: **autoestima**, energía, obsesión, impulso, deseo, competitividad, creatividad e inteligencia. Era muy

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

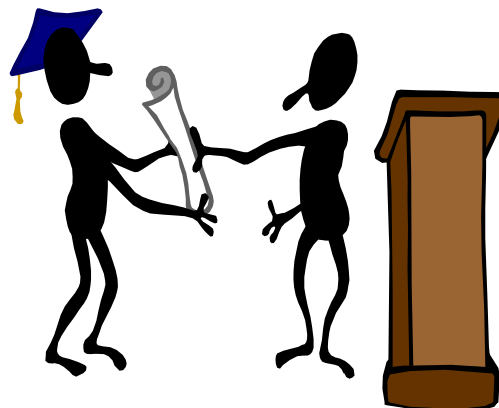
Página 26

bueno en todos los campos, gracias a las matemáticas.

Tenía una gran energía, debido a que fue un muchacho muy sano y alegre. El hábito de la lectura lo tuvo desde muy niño, ya que a la edad de ocho años, leyó completa la enciclopedia *World Book Encyclopedia*.

Paul Allen, socio fundador de *Microsoft®* junto con *Bill Gates*, leía mucho más que éste. Se convirtieron en fanáticos de las computadoras a los trece años y leían de computadoras y las utilizaban día y noche. En el Centro de Computación *Computer Center Corporation* de Seattle, Washington, los habían contratado junto con otros alumnos, para que durante la noche rompieran los sistemas de seguridad de las computadoras, que anotaran las fallas, para que los programadores de la empresa los corrigieran y volvieran los sistemas mucho más seguros.

En el Centro de Computación, les prestaban los manuales de las computadoras para que los devolvieran al otro día. En lugar de irse a sus casas, se quedaban leyendo los manuales toda la noche. *Gates y Allen* sobresalían de los demás debido a su interés y entusiasmo.



Mientras esperaban su turno para utilizar la computadora, en la Escuela Lakeside de Seattle, *Gates y Allen* jugaban ajedrez y el juego chino Go. *Gates* era invencible en Go y muy bueno en ajedrez, además, jugaba tenis y squash magníficamente.

Paul Allen dejó *Microsoft®* para fundar su propia compañía, también dedicada a producir programas para computadora.

Bill Gates es el matemático y programador de computadoras más rico del mundo y de todos los tiempos. Ha logrado su sueño: Que en todas las computadoras del mundo se utilice software (programas de computadora) de *Microsoft®*. Actualmente, en la mayoría de las computadoras personales del mundo, se utilizan sus programas tales como: *Windows®, Office®* (Word, Excel, PowerPoint, Access), *Windows Media Player®, Internet Explorer®* y la enciclopedia *Encarta®*.



UNIDAD II

LA AUTOESTIMA

Es apreciar el valor e importancia propios y tener el carácter para ser responsable de uno mismo y de actuar responsablemente hacia los demás. El diccionario Webster lo define como “Confianza y satisfacción en uno mismo”. **La autoestima es un estado mental. Es una actitud.** La autoestima es el puente en lo que eres y en lo que haces, ya que como te sientas y pienses acerca de ti y de los demás así actuarás. Quien se siente bien consigo mismo producirá resultados positivos siempre. **Tu autoestima afecta todo lo que haces**, por esto es muy importante, pues se refleja en nuestras acciones y en el trato con los demás. **La autoestima significa creer en ti.** Sentirse bien con uno mismo no es un lujo, sino una urgente necesidad para lograr el éxito en la vida.

La autoestima no es un estado mental rígido o fijo, **NO, es algo que podemos cambiar y aprender.** Pero el cambio sólo ocurre cuando nos responsabilizamos de nuestros pensamientos, decisiones y acciones. Debemos aceptar que el cambio sólo lo puedes hacer tú, **nadie más puede cambiarte si tú no quieres cambiar. Nadie puede enseñarte si tú no quieres aprender.** No podemos cambiar a los demás y al mundo, únicamente puedes cambiarte a ti y cuando lo hayas hecho notarás que el mundo ha cambiado. CAMBIAR es un proceso y hay que TRABAJAR DURO, pues requiere mucho ESFUERZO. Por esto, todo lo que vale la pena en la vida tiene que lograrse con esfuerzo y dedicación. Los cambios pueden provocar dolor, miedo, enojo y frustración, pero sobre todo cambian tu vida y la catapultan hacia el éxito; pero si te producen frustración, es necesario sobreponerse, pues al recorrer el camino del éxito puedes tener caídas, ya que para llegar a la cima es necesario levantarse y continuar el ascenso.

Analiza el dilema siguiente:

“Reír es arriesgarse a parecer un tonto.

Llorar es arriesgarse a parecer sentimental.

Buscar a otro es arriesgarse a involucrarse.

Exponer los sentimientos es arriesgarse a ser rechazado.

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 28

Exponer los sueños frente a la muchedumbre es arriesgarse al ridículo.

Amar es arriesgarse a no ser amado.

Seguir adelante frente a la abrumadora adversidad es arriesgarse al fracaso.

Pero es necesario correr riesgos, porque el mayor peligro en la vida es no arriesgar. La persona que no arriesga no hace nada, no existe, es como si estuviera muerta en vida. Puede evitar el sufrimiento y la pena, pero no puede aprender, cambiar, crecer o amar. Sólo la persona que se arriesga es libre”.

El principal obstáculo para el éxito es no creer en uno mismo. Con frecuencia nos concentramos más en nuestras limitaciones en vez de resaltar nuestras cualidades. Cuando destaquemos más nuestros puntos fuertes y los utilicemos, dejando de lado de nuestras debilidades, entonces habremos creado una actitud positiva y optimista y habremos iniciado el camino del éxito. Pues el éxito se logra con un 80 % de actitud y un 20 % de aptitud, es decir, nuestros talentos naturales no son tan importantes sino lo que hacemos con ellos. *La mente puede lograr todo lo que pueda concebir y creer. Si puedes soñarlo, puedes lograrlo.* Con el tiempo, el modo como actúas será determinado por como piensas, te sientes y crees. Es cierto que lo que esperamos,

creemos y pensamos a diario no solo afecta nuestros logros en la escuela sino nuestro éxito en casa y con los demás. Por esto, jamás te rindas ante las adversidades, no te preocupes, mejor ocúpate, pues por más grande que sea un problema con esfuerzo y dedicación todo podrá resolverse.

La acción y la autoestima van de la mano, porque la autoestima es el puente entre quien eres tú y lo que haces. **La autoestima se manifiesta siempre en acciones, en actividades y ocupaciones.** Por esto, es el antídoto más efectivo contra la depresión, la ansiedad y el estrés. Nadie que esté ocupado y haciendo podrá estar al mismo tiempo deprimido, pues es imposible estar activo y deprimido simultáneamente. La falta de acción puede provocar depresión, lo que te llevará a tener una baja autoestima, que es la causa principal del fracaso y frustración de las personas.



“Caminemos juntos con alegría y decisión, porque el día de la victoria es hoy”

“La victoria y el éxito están dentro de nosotros”

“La motivación mueve al mundo”

“La lectura desarrolla la inteligencia”

“¡El único camino al éxito es la lectura y no hay más!”

“El ser humano posee tesoros y talentos invaluable. Pero, estos sólo salen a brillar y a relucir, después que los hemos pulido mediante el esfuerzo y la dedicación. Pretender tener éxito sin esforzarse es como querer cosechar sin haber sembrado”

“La forma que pensamos es la forma en que actuamos. Somos lo que pensamos. Si la mente controla al cuerpo siempre lo guía por el camino del éxito. Si el cuerpo domina la mente, entonces lo lleva por el camino del vicio y de la mediocridad. Tú decides.”

Nantúnez

UNIDAD III

LECTURAS DE CARÁCTER Y PERSONALIDAD

ARTHUR KAVANAGH

La mente es la medida del ser humano y no la estatura de su cuerpo. Por ejemplo, Arthur Kavanagh cumplió su compromiso con la vida a pesar de una dolorosa desventaja: no tenía ni brazos ni

piernas. La mayoría de nosotros consideraría esto una insuperable invalidez. Pero, Arthur no lo consideró así. Mientras veía a sus compañeros entretenidos en los juegos en los cuales no podía participar, una tormenta estremecía su mente, su alma y su cuerpo incompleto. Con las mandíbulas apretadas y las ventanas de la nariz abanicando, a manera de fuelles, su fuego interior, **decidió** que se levantaría desde su triste condición hasta las alturas de honor y la fama,

Se convirtió en un **lector** selectivo y cuidadoso. Día tras día almacenaba los conocimientos que necesitaría el día que ocupara su puesto en el Parlamento inglés. **Tal era la meta que se había propuesto.** Ocupar un escaño en la augusta asamblea que conocemos como la Cámara de los Comunes. Todos reían con sólo imaginar que las dos terceras partes de un hombre —cabeza y tronco— fueran representantes del orgulloso pueblo inglés. Creían que aquello no era más que una ridícula y ofensiva pretensión.

Pero Arthur había leído historia y biografía y sabía que **la dedicación, el esfuerzo y la fuerza viril** podían vencer su deformidad. Así que continuó cultivando su mente, leyendo y estudiando buenos libros.

Cuando la excesiva dedicación a la

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 30

lectura comenzó a minar su salud, se hizo **deportista**. Atado, como un saco de arena, a una montura especial, se convirtió en uno de los mejores jinetes de Irlanda. Cuando se convirtió en tediosa rutina, asíó las riendas entre los dientes y con los muñones de brazos que tenía tomó una escopeta y se fue de cacería. Llegó a tirar tan bien, que años después se hizo famoso por su valor y serenidad en la cacería de tigres, elefantes y otras bestias feroces que en ese tiempo infestaban las selvas de la India.

La pesca era su deporte favorito y se hacía a la mar manejando solo su bote de velas. Aprendió a dibujar y a escribir con excelente letra, tomando la pluma con los dientes. Con la ayuda de varios aparatos ortopédicos para suplir sus limitaciones físicas, se las arregló para viajar por Egipto, Persia, India y Asia Menor.

Mientras tanto, seguía leyendo y pensando, preparándose para el momento en que entraría al parlamento. **Demás está decir que logró su propósito. Era inevitable. Nadie puede evitar que un ser humano resuelto ocupe el lugar que sólo él está preparado para ocupar. El universo y el mundo se hacen a un lado para darle paso a los triunfadores y conspiran para que lo logre.** En 1866, a la edad de 35 años, entró a la Cámara de los Comunes, como representante del

condado de Wexford. Más tarde representó a su propio condado durante 12 años consecutivos en esa misma asamblea.

Mucho se ha dicho acerca del éxito en la vida. Casi todo lo que se ha dicho es bueno y sabio. Pero si miras a tu alrededor con cuidado, verás que **aquellos que desempeñan con éxito su tarea hoy, y que tienen esperanzas para el porvenir, leen buenos libros y lo hacen con regularidad. Hazlo tú también.**

La mente se desarrolla pensando, no hay otro camino. Y, aunque técnicamente leer no es pensar, la lectura es fuente óptima de los mejores pensamientos. **En ese sentido leer es pensar.**

Hay dos caminos para educar la mente. El primero es la asociación personal con las mentes de grandes hombres y mujeres. En otras palabras, los grandes maestros. El segundo es mediante la lectura de lo que los pensadores dejaron escrito en sus libros.

El primer método es ideal pero imposible de seguir. El único camino que queda es el de los libros. El de la lectura. El que lee, se sienta a los pies de los grandes maestros. La lectura abre ante la mente un universo que yace oculto. Sólo la lectura puede sacarlo a la luz. Todo lo que la humanidad ha pensado y realizado se conserva en

las páginas de los libros. **Saber leer es poseer la llave mágica que abre el cofre donde se guardan los tesoros de la sabiduría.** Nada reditúa más el tiempo que se le dedica, como lo hace la lectura. Sus beneficios son enormes y notables. El lector que lee buenos libros, es como si entrara a una ciudad maravillosa o a un jardín de delicias.

Lee, no como obligado por un deber; no motivado por la moda; ni siquiera para adquirir conocimientos, sino por un hambre y una sed que sólo se pueden saciar en el goce del más elevado placer que existe. El gozo y el placer de percibir y sentir cosas lúcidas, luminosas, simétricas, sinceras, musicales, apasionadas y profundas. Al conjunto de esto le llamamos belleza. Este deleite restaura las energías al corazón cansado y le comunica nuevo vigor. Lo hace más fuerte para soportar los males de la vida y más fértil para producir una rica cosecha de valor, alegría y amor.

No importa cuán fuerte y hábil seas, cada vez que llamas a otro en tu ayuda añades fortaleza a la tuya. Eso haces al leer. Heredas la sabiduría acumulada de los siglos. A través de los libros puedes abarcar el campo completo del conocimiento.

Verdaderamente, **la lectura es el corazón y el alma de la cultura**

en su más alta expresión. Muchos de los seres humanos ilustres del mundo alcanzaron la excelencia intelectual sin haber pisado el umbral de una escuela. Solos, sin ayuda, recorrieron el camino real de la lectura porque eran demasiado pobres para asistir a la escuela. Los únicos maestros que conocieron fueron los que viven en los libros. Con frecuencia hicieron grandes sacrificios y se sometieron a dura disciplina y penoso trabajo para entender a sus silenciosos instructores. Pero al final demostraron igual capacidad, --y a veces más-- que aquellos que se habían sentado a los pies de sabios maestros en el aula.

BENITO JUÁREZ

Transcurría el año 1855. En ese tiempo Acapulco no era más que un caserío somnoliento, indiferente a la belleza del paisaje. Un día de verano, el sol calcinaba, con usual eficacia, la costa de la *tierra caliente*. Era la hora del sopor de la siesta.

Un indio solitario cruzó, con paso firme, el caserío. Su ropa raída denunciaba la pobreza extrema y el semblante huraño le daba un extraño aire de tristeza. Con paso lento pero decidido se presentó en la casona que era el cuartel general de la revolución que encabezaba don Juan Álvarez contra la dictadura del general Santa Anna. Una de las revoluciones de aquel

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 32

México, que no era más que una confusión de pueblos sin identidad nacional, que buscaba su destino.

El indio se presentó ante el coronel don Diego Álvarez, hijo del jefe revolucionario, hombre enérgico y de rápidos ademanes.

--¿Cómo se llama usted? – preguntó el coronel.

El indio pronunció su nombre en tono tan quedo que el coronel no lo escuchó, cosa que, de todos modos, carecía de importancia para él, así que volvió a preguntar:

--¿Y qué desea usted?

Ahora la voz del indio se hizo clara y audible.

--Sabiedo que aquí se pelea por la libertad, vine a ver en qué puedo ser útil.

--¿Sabe usted leer y escribir? – volvió a preguntar el coronel.

--Sí –dijo el indio, con el mismo aire imperturbable y sin dejar traslucir la más mínima emoción.

Finalmente presentaron al indio al jefe revolucionario y... aquí le damos la palabra al coronel: *"Ocioso es decir que estando desprovistos de ropa para el recién llegado, no sabíamos qué hacer para remediar la ingente necesidad que sobre él pesaba; hubo de usar,*

pues, el vestuario de nuestros pobres soldados, esto es, algún calzón y algodón de manta, agregando un cobertor de la cama del señor mi padre y su refacción de botines, con lo que...se entonó admirablemente. Por lo demás, el señor mi padre, que tuvo gusto en recibir a un colaborador espontáneo en la lucha iniciada contra Santa Anna, estaba en la misma perplejidad que yo, y al ofrecerse él a escribir en la secretaría, repitiendo que había venido a ver en que podía ayudar aquí, donde se peleaba por la libertad, se le encomendaron algunas cartas de poca importancia, que contestaba, y con la mayor modestia las presentaba a la firma".

Ocho días después llegó un correo extraordinario. Entre la correspondencia venía un sobre principal rotulado: "Sr. Lic. Don Benito Juárez" y el humilde escribiente lo reclamó.

El coronel lo miró casi con espanto y por un momento estuvo a punto de perder la tiesa compostura.

--¡Pues qué! ¿Es usted licenciado?

--Sí, señor –dijo el indio.

--¿Conque usted es el que fue gobernador de Oaxaca?

--Sí, señor.

--Pero, ¿Por qué no me había dicho

eso?

--¿Para qué, señor? ¿Qué tiene eso de particular?

Este es Benito Juárez. Un ser humano de carácter. Uno de los prohombres de la humanidad. Su paso por la vida y su entrada a la historia no puede atribuirse al talento o a otras virtudes que han hecho grandes y brillantes a otros seres humanos, sino a su **carácter** y a su **sencillez**. Su más famosa frase es una regla de oro para la paz mundial: *“Entre los individuos como entre las naciones, el respeto al derecho ajeno es la paz”*.

Carácter y personalidad son dos términos que solemos usar indistintamente. Puede y debe, hacerse una clara diferencia entre ellos. El carácter es lo que el ser humano es. Es la suma de los atributos de la mente, el cuerpo y el espíritu del ser humano. Es el conjunto de las virtudes internas e invisibles del ser humano. Es el sello, el fondo y la huella de su ser.

En cambio, **la personalidad es el carácter hecho visible**. Esto es, todos los atributos del carácter que aparecen en las facciones, en las palabras y el comportamiento forman la personalidad.

El carácter distingue a su poseedor de todos los demás. Constituye el modo de ser peculiar y privativo de

cada persona. **Es la marca indeleble y la nota perdurable que se imprime en la vida.**

“Siembra un pensamiento y cosecharás una acción, Siembra una acción y cosecharás un hábito, Siembra un hábito y cosecharás un carácter, Siembra un carácter y cosecharás un destino”.

MUCIO ESCÉVOLA

La historia de Roma nos ofrece ejemplos de varones de una fortaleza de carácter sobrehumana.

Cuando el rey etrusco Porcena sitió Roma a causa de las maquinaciones de Tarquino, el joven patricio Mucio Escévola decidió matar al enemigo de su patria. Salió de Roma y cruzó las líneas enemigas hasta alcanzar el campamento del rey.

Al llegar al campamento creyó ver a Porcena y, acercándose le dio muerte. Inmediatamente descubrió, sorprendido, que no era el rey sino su lugarteniente.

Hecho prisionero y llevado ante el rey se negó a contestar el interrogatorio. En vez de hablar, actuó. Frente a él había un brasero ardiendo. Ante el asombro de Porcena y sus guardias, metió la mano derecha a las llamas y, sin hacer un solo gesto, la mantuvo allí hasta que se quemó por completo.

Mientras su mano ardía le dijo al

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 34

rey que imponía ese castigo a su mano derecha porque había fallado en su empeño de matarlo. Porcena y sus guardias, como hipnotizados por aquel acto heroico, no acertaron a detenerlo.

Cuando su mano se convirtió en carbón, le presentó el muñón a Porcena y le dijo que otros 300 jóvenes romanos estaban dispuestos a emprender la empresa en la que él había fracasado. Impresionado Porcena ante tanto heroísmo y atemorizado por la amenaza, levantó el sitio y ofreció paz.

RÉGULO

Durante las guerras púnicas, escenario de tan grandes hazañas, brilló con resplandor, que todavía no se extingue, la llama de un gran carácter. Marco Atilio Régulo fue cónsul de Roma por primera vez en el año 267 a.C. y de nuevo en 256.

Durante la primera guerra púnica fue comandante de la escuadra romana, con la que obtuvo brillantes victorias contra los cartagineses. Después de la victoria en la batalla naval de Ecnomo, los cartagineses pidieron la paz, pero las condiciones que Régulo les puso fueron tales que prefirieron continuar la guerra. Como los cartagineses habían recibido refuerzos de los griegos, logístico y humano, en la batalla que se dio a continuación

derrotaron a los romanos e hicieron prisionero a Régulo.

Después de dos años de cautiverio, los cartagineses, debilitados, pidieron la paz a los romanos y enviaron a Régulo a Roma como negociador. Pero antes de salir de Cartago le exigieron que jurara, bajo palabra de honor, regresar al cautiverio sino lograba obtener la paz por medio de sus gestiones.

Es fácil imaginar sus emociones cuando llegó a su amada ciudad. Podría haberse quedado abogando por la paz. Pero, ¿Sabes lo que hizo? Cuando el Senado se reunió para discutir la proposición de Cartago, él fue el más ardoroso defensor de la continuación de la guerra, sabiendo que la victoria de Roma era segura.

Cuando se decidió la continuación de la guerra, el senado le pidió que se quedara alegando que un juramento sacado a la fuerza no obliga a quien lo profiere, pero Régulo le dirigió estas memorables palabras:

“¿Tan empeñados están en que me degrade? Bien se que me esperan torturas y muerte al volver. Pero, ¿que cosa baladí es todo esto, comparado con la vergüenza de una acción infame, con las heridas de un alma culpable! Quiero conservar en su pureza el carácter romano, aun siendo prisionero de los cartagineses. He jurado volver.

Cumpliré mi palabra. Lo demás, dejadlo en manos de los dioses”.

Fiel a su palabra, regresó a Cartago para constituirse nuevamente en prisionero. Irritados, los cartagineses lo sometieron a los más horribles tormentos, en los cuales murió. Pero su nombre ha quedado como símbolo de patriotismo y lealtad.

Eso es carácter. Se que la integridad física es sagrada y que sólo se debe rendir la vida por un principio elevado. Estos ejemplos pueden parecerte bárbaros y sangrientos o sublimes, según el juicio que te inspire. Pero creo que convendrás conmigo en que sólo un gran carácter es capaz de tales acciones.

Por supuesto, no todos estamos llamados a ser héroes. No todos tendremos ocasión de mostrar este tipo de valor y lealtad. Los tiempos cambian y las exigencias también. Ahora hay otros desafíos y otras exigencias, tanto o más importantes, en los cuales nos va nuestro honor y nuestro destino. Nosotros también necesitamos firmeza de carácter para hacer frente a nuestro destino.

Puede ser que tú digas que muchos actos pequeños de lealtad, patriotismo, de valor y honradez valen más que una gran hazaña. Tienes razón. El joven íntegro, que cumple con los sencillos deberes de

hijo, de estudiante, de compañero, de amigo y de ciudadano, vale tanto como el patricio que sacrifica su vida en bien de su patria.

El carácter es exclusivo de hombres y mujeres. Los animales no pueden poseer carácter porque éste supone la racionalidad. **Es una voluntad desarrollada y una conquista. Llega a tener carácter el que ha formado el hábito de vivir por principios. En la elección cotidiana de hacer lo recto y lo justo se va formando el carácter.** Por eso se dice que el carácter es la conquista suprema de la libertad. **El premio y la gloria de la vida es el carácter.**

Por eso, el logro de un carácter noble y firme debe ser la constante aspiración de todos los hombres Y mujeres. Tú puedes hacer lo que quieras, pero debes saber que al final tendrás un carácter. Si tus decisiones fueron equivocadas, serás preso con cadenas de tu propia hechura.

MARIE CURIE

Se llamaba María Sklodowska. A los 19 años decidió dedicar su vida a la ciencia y se inscribió en la Universidad de París. Era tan pobre que tenía que vivir con sólo tres francos diarios. En su cuarto no había luz eléctrica ni calefacción, y como sólo podía comprar dos bolsas de carbón para el invierno, muchas veces no

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 36

encendía la estufa. Las heladas noches invernales de París la vieron temblar de frío y con los dedos azules y entumecidos mientras resolvía sus problemas de matemáticas.

Una vez se desmayó en la clase y, cuando volvió en sí, confesó al médico que durante varios días sólo había comido un puñado de cerezas y unos rábanos. Años después se casó con el profesor Pedro Curie, uno de los intelectuales más distinguidos de Francia y que, como ella, estaba totalmente dedicado a la ciencia.

Obligada a hacer una investigación original para obtener su doctorado, decidió investigar el hecho misterioso de que un metal llamado uranio irradiaba rayos de luz. Aquel fue el comienzo de una gran aventura científica y de un viaje al maravilloso mundo de la química, en el cual la acompañó su esposo que abandonó sus propios proyectos de investigación para ayudarla.

Después de muchos meses de experimentación, los Curie arrojaron una bomba en el mundo científico. Anunciaron que habían descubierto un nuevo elemento químico cuya radiación era dos millones de veces más potente que la del uranio y que podía penetrar la madera, la piedra y el acero. Llamaron a esa prodigiosa sustancia *radium* y a sus

potentes radiaciones, *radiactividad*.

Pero los hombres de ciencia dijeron: “Muéstrenos radio puro, de modo que podamos verlo, probarlo y determinar su peso atómico”. Madame Curie trabajó durante cuatro años para producir un decigramo de radio, un pedacito de metal del tamaño de un granito de frijol, arrugado y deslucido. ¿Sabes cómo lo hicieron? Refinando más de ocho toneladas de mineral de piedra en una estufa desvencijada.

Como resultado de su descubrimiento Madame Curie se convirtió en la mujer más famosa del mundo. Pronto se descubrió que el radio era de valor incalculable para combatir el cáncer. Existía en el mundo una creciente demanda de radio y nadie en el mundo sabía producirlo, excepto Madame Curie y su esposo.

Un domingo del año de 1906 recibieron una carta. Un grupo de ingenieros norteamericanos deseaba usar el radio en los Estados Unidos. Pedro Curie explicó a su esposa la situación: Tenemos dos caminos –dijo. Podemos describir los resultados de nuestra investigación, sin reserva alguna, incluyendo el proceso de la purificación. Madame Curie hizo un gesto de aprobación y murmuró: “Sí, por supuesto”.

O bien –dijo su esposo— considerarnos propietarios e “inventores” del radio, patentar la técnica de producción y asegurarnos los derechos de fabricación del radio en todo el mundo.

En ese momento se encendió el halo de grandeza que circunda desde entonces la figura de Madame Curie. “Es imposible –dijo ella—. Sería contrario al espíritu científico. Además, el radio está destinado a combatir las enfermedades y considero ilícito aprovechar esa circunstancia”.

¿No se te mueve el corazón ante tanta grandeza? ¿No proclamarías a esta mujer heroína de la humanidad? ¿No son esta clase de seres los que elevan a nuestra raza decadente y evitan su total descomposición? ¿No es esto verdadero éxito?

Madame Curie recibió medallas, condecoraciones y títulos honoríficos de muchas organizaciones científicas, gobiernos y universidades. Su fama era inmensa. Su vida se vio adornada por el éxito exterior porque era tan grande que no podía ocultarse, de la misma manera que una antorcha encendida no se puede ocultar en la oscuridad. Pero ella no se dejó embriagar por el éxito. Siguió dedicada a la investigación científica hasta el último día de su

vida, como sino hubiera ganado dos veces el premio Nóbel: de Física en 1903 y de Química en 1911, hazaña que ningún hombre logró igualar durante medio siglo, hasta que lo logró Linus Carl Pauling, quien ganó el Nóbel en Química en 1954 y de la Paz en 1962. Hallaba su felicidad en la ciencia misma, y no en sus resultados; **por eso su grandeza estaba en su vida, no en sus descubrimientos. Las personas son grandes cuando su mentalidad es grande.**

BEETHOVEN

Aun en las situaciones más adversas, si se quiere se puede lograr todo, por ejemplo, **Beethoven**, el gigante de la música, estaba perdiendo el sentido del oído, había pasado mucho tiempo sin escribir ninguna obra musical que sus volubles compatriotas austriacos apreciaran. Para cuando hubo escrito la novena sinfonía, ya ellos lo habían descartado como inútil.

A decir verdad, para cuando se estrenó la obra, Beethoven ya estaba completamente sordo. Pero al final de la sinfonía, la audiencia vienesa estaba de pie aplaudiéndolo. Beethoven se hallaba de espaldas, el gran músico no podía oír las ovaciones, pero al volverse pudo ver claramente al público de pie,

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 38

vencido por la emoción y admiración de su genio, con tanta frecuencia rechazado durante su vida.

Hoy escuchamos la melodía del cuarto movimiento de esa inmortal sinfonía, como el “Himno a la Alegría”. Cuando *Beethoven* escribió su novena sinfonía, el tema fue la “*hermandad de los seres humanos*”.

Beethoven necesitaba sus oídos en gran manera para poder escribir su música, sin embargo, a pesar de estar sordo, no se desanimó y escribió su gran obra con el corazón.

Nosotros que estamos completos de nuestros órganos, pensamos que no podemos tener éxito como estudiantes, cuando hay muchísimos ejemplos de gente que aun siendo discapacitada, ha logrado triunfar en la vida. No tenemos un solo pretexto para no lograr el éxito como estudiantes y como seres humanos.



STEPHEN HAWKING

Otro ejemplo muy notable lo constituye el Científico inglés **Stephen Hawking**, quien aún teniendo una grave enfermedad, que solo le permite mover los ojos, la cabeza y los dedos de la mano derecha, ha obtenido sus mayores logros en Física Teórica, después de su enfermedad.

Con los dedos manipula un sintetizador de voz que está conectado a una computadora, para poder comunicarse con el mundo exterior. Decidió dedicarse a la Física Teórica, ya que en este campo su única herramienta de trabajo es su cerebro, el cual al igual que su memoria no resultaron tan afectadas por su enfermedad.

A pesar de no poder mover

ninguna otra parte de su cuerpo, salvo las ya mencionadas, Hawking ha escrito sus propias teorías acerca del Universo, de los Hoyos Negros, del Tiempo, del Big Bang y del Big Crunch. Su libro “Historia del Tiempo” ha vendido más de 10 millones de ejemplares en todo el mundo.

Cuando estaba joven y sano, su idea era estudiar matemáticas y física, pero sus padres querían que estudiara medicina o por lo menos biología. Llegaron a un acuerdo, por el cual al principio estudiaría las tres áreas, renunciando a las matemáticas avanzadas. Sin embargo, para desarrollar sus teorías, requería de matemáticas avanzadas, razón por lo cual tuvo que recurrir a *Roger Penrose*, quien es un excelente matemático.

Debido a sus grandes contribuciones, *Stephen Hawking* fue nombrado *Comendador del Imperio Británico* y *Caballero de Honor* por la reina Isabel II.



Algunas de sus frases son:

“Antes de que se me diera el diagnóstico de mi enfermedad, la vida me aburría. Nada merecía la pena. Pero poco después de salir del hospital, soñé que iban a ejecutarme. Repentinamente comprendí que podría hacer muchas cosas que valían la pena, si era indultado.”

“En el año 1979 fue elegido Lucassian Professor de Matemáticas. Se trataba de la misma cátedra que ocupó Isaac Newton. Hay un libro enorme en el que firman todos los profesores que imparten clases en la Universidad. Después de un año como profesor, se dieron cuenta de que no había firmado todavía. Entonces, trajeron el libro a mi despacho y logré firmar con cierta dificultad. Aquella fue la última vez que escribí mi firma.”

ALBERT EINSTEIN

En ocasiones ignoramos nuestras capacidades y potencialidades, por lo tanto las desaprovechamos y las desperdiciamos. Debemos estar

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 40

conscientes de nuestra gran capacidad mental y aprovecharla en cosas buenas, que nos permitan tener un futuro mejor. *Una de las mejores puertas hacia un buen futuro es la educación, la cual a su vez, tiene como base las matemáticas, por esta razón, en lugar de esquivarlas, debemos afrontarlas con buen animo y disposición, en vez de aborrecerlas y temerlas.*

Quién sabe si en un futuro no muy lejano serás un gran matemático o físico, tal como le pasó a **Albert Einstein**, quien nació en Ulm, Alemania, el 14 de marzo de 1789.

El pequeño Albert emitió palabra hasta los 3 años (muchos pensaron que sería retrasado mental) y siempre conservó ese aire taciturno de niño de pocas palabras. Rebelde por instinto, hacía enfurecer frecuentemente a sus profesores quienes lo regañaban muy a menudo.

A los dieciséis años escapó de los límites del Luitpold Gymnasium de Munich - donde su profesor de griego le dijo “*tú nunca llegarás a nada*” - y persuadió a un médico para que escribiera una nota en la que declaraba que el régimen escolar le estaba llevando al borde de una crisis nerviosa.

Einstein en la Secundaria era considerado un tonto y distraído, jamás nadie le auguró un futuro

brillante.

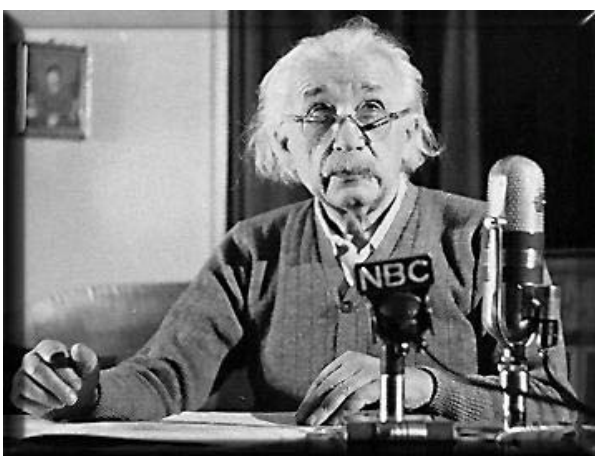
Trató el joven Einstein de ingresar a la universidad, pero fracasó en su examen de admisión. Pasó un año en Preparatoria y por fin se graduó en el Instituto Federal de Zúrich, Suiza en 1900. ¿Sus calificaciones? Nada excepcionales, pues prefería tocar el violín, matar el tiempo en los cafés u holgazanear en un bote a mitad del lago de aquella ciudad con su novia Mileva Maric, una de las primeras mujeres que estudiaban en el instituto.

Trató de ejercer como profesor de ciencias en alguna escuela o como investigador, pero su suerte no fue buena. Dio clases de matemáticas y física hasta que encontró un empleo como “*experto técnico de tercera*” en la Oficina de Patentes de Berna, Suiza, en 1901.

Dos años después se casó con Mileva y tuvieron su primer hijo. En esta modesta oficina fue donde concibió los fundamentos de la *Teoría de la Relatividad* y los fundamentos de la *Física Cuántica*.

Es admirable que Einstein nunca pensó ser un gran Físico-Matemático, ya que sus mayores aficiones eran la filosofía, la literatura y la música. Es posteriormente cuando le surge el interés por la física, pero se da cuenta que para demostrar y exponer sus teorías, necesita

fuertes bases matemáticas, preparándose en esta rama con gran dedicación y esfuerzo.



Es muy importante esforzarse en el estudio y aprendizaje de las matemáticas, quien sabe si en ti no hay un gran científico en el futuro.

Algunas frases notables de Einstein son:

“Dios no juega a los dados con el mundo”

“Quiero conocer los pensamientos de Dios..... El resto, son detalles”

“No es que yo sea tan inteligente, es solo que permanezco más tiempo analizando los problemas”

“Disfrutar la observación y la comprensión, es el mayor don de la naturaleza”

“Yo no tengo un don especial, solo que soy apasionadamente curioso”

“Pequeño es el número de los que ven y sienten con sus propios ojos y corazones”

“El supremo arte del maestro es despertar alegría en el conocimiento y la expresión creativa”

“Nada beneficiaría más la salud humana y las oportunidades de sobrevivir en la tierra que la evolución hacia una dieta vegetariana”

“La enseñanza debería percibirse como un valioso don y no como un duro deber”

En alguna ocasión, alguien me comentó: Bueno, están muy bien tus biografías de gente que ha luchado y ha tenido éxito, ¿Pero, no existen mexicanos destacados que pudieras incluir en el libro? La respuesta es que sí, por supuesto que hay bastantes, tantos que sería imposible incluirlos a todos. Vuelvo a repetir, que *el mexicano es la persona con más inventiva y creatividad del mundo*. Pero desafortunadamente también tenemos grandes defectos, tales como: el malinchismo (preferir lo extranjero), la flojera, la impuntualidad, el ahí se va, el no puedo. Todo lo anterior es cuestión mental y la única forma de superarlos es cambiando nuestra forma de ser y de pensar. Cualquiera que ha vencido lo anterior, ha tenido éxito en México y es reconocido en todo el mundo.

A continuación te enlisto algunos nombres de mexicanos destacados:

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 42

Octavio Paz, premio Nóbel de literatura, Mario Molina, premio Nóbel de química, Guillermo González Camarena, inventor de la televisión a colores, Rodolfo Neri Vela, primer astronauta mexicano; Diego Rivera, José Clemente Orozco, David Alfaro Siqueiros, José Revueltas, Carlos Fuentes, Ignacio Chávez Sánchez, Guillermo Soberón Acevedo, Heberto Castillo Martínez, Marcos Moshinsky, Luis Esteva Maraboto, Leonardo Zeevaert, Arturo Rosenblueth, Roberto Meli Piralla, Carlos Jarque Uribe, Hugo Sánchez, Ana Gabriela Guevara, Nancy Contreras, Soraya Jiménez, Belem Guerrero, Fernando Platas, etc., etc. Discúlpenme los más de 5000 hombres y mujeres ilustres mexicanos que no menciono, pero como comprenderán esto es imposible.

Las aportaciones que México ha hecho al mundo son las siguientes: el cero, aguardiente, Sistema solar para aire acondicionado, ametralladora, cacao -chocolate-, elevador, flotador, goma de mascar (chicle), henequén, maíz, chile, pulque, tortilla, Morelos I (primer satélite mexicano) y el tequila.

Fijate un ideal elevado y nunca te apartes del camino que conduce a tu ideal. Concentra en el todas tus fuerzas...y no te preocupes si debes luchar por meses o años en alcanzarlo. Ten por seguro que lo alcanzarás. Podría darse el caso

que nunca lo alcanzaras si es muy ambicioso, pero aún así tu esfuerzo resultaría muy productivo, ya que te elevarías a un plano superior. Descubrirás en ti nuevas fuerzas que ni siquiera sospechabas que tuvieras. Pero lo más importante será que inscribirás en tu alma la convicción de que eres alguien, que inscribiste tu nombre en la lista de los seres humanos que no han vivido en vano. Entonces experimentarás la satisfacción de los que convierten su vida en bendición para los demás.

Que tu primer propósito sea prepararte para el futuro. Si sueñas con la fama búscala en el arte, en la ciencia, en la educación. Puedes aspirar a ser un gran artista, un gran científico o un gran maestro o hacer buenas obras. Es bueno todo esto y tener dinero y grandes posesiones...Pero te advierto que hay ideales mejores. Hay ideales que los grandes seres humanos del pasado consideraron mayores y más nobles. Séneca escribió: *“Todos pueden aspirar a lo que constituye la verdadera nobleza del ser humano, que consiste en una razón recta, un alma justa, la sabiduría y la prudencia”*. **Ser, hacer y tener** son las tres estrellas brillantes de la grandeza, de las tres la más brillante es **ser**. Recuerda que es mejor ser grande que hacer grandes cosas. El mejor ideal es buscar un alma justa, una razón recta y un corazón limpio. Lo que

un ser humano **es** perdura más que lo que hace.

Por tanto, hazte el propósito de llegar a ser un ser humano recto y justo. No te dejes desviar por la corriente del mal. No sigas a las multitudes que siguen como esclavos la última moda y al último ídolo. Sé tú mismo siempre. Sé único, diferente y extraordinario.

Aléjate de los vicios que son exclusivos de los idiotas y evita los pretextos que los usan únicamente los mediocres.

ACTIVIDADES A REALIZAR

1. ¿Qué enseñanza te deja Arthur Kavanagh?
2. ¿Qué enseñanza te deja Mucio Escévola?
3. ¿Qué enseñanza te deja Régulo?
4. ¿Qué enseñanza te deja Marie Curie?
5. ¿Qué enseñanza te deja Beethoven?
6. ¿Qué enseñanza te deja Stephen Hawking?
7. ¿Qué enseñanza te deja Albert Einstein?
8. Escribe las características que consideres pueden hacer exitosa a una persona.

UNIDAD V

ALGUNOS CONSEJOS PARA LOGRAR UN BUEN APRENDIZAJE

A continuación te expongo algunas ideas que te ayudarán a obtener mejores resultados en el aprendizaje, no sólo de las matemáticas sino de cualquier materia.

- ❖ Estudia en equipo si es posible, pero los ejercicios siempre hazlos en forma individual, ya que el aprendizaje y la evaluación son personales.
- ❖ Trata de escribir el concepto con tus propias palabras. Mientras lees, detente para analizar, comprender y pensar en lo que leíste, no avances hasta haber entendido lo anterior.
- ❖ **Aprende bien las reglas y leyes que se te dan.** Procura aprender poquito pero bien, grábalo firmemente en tu cerebro y jamás dudes. Resolver los ejercicios ayuda grandemente a lograr este objetivo. **La unión de conocimientos pequeños pero firmes es lo que te hace ser sabio.**
- ❖ Debes ser ordenado, limpio y cuidadoso con tus útiles escolares. En el seguimiento de instrucciones debes poner

mucha atención en los detalles. Debes seguir en orden secuencial los temas.

- ❖ Organízate y **estudia todos los días 2 horas diarias**, durante este tiempo mantente concentrado y atento a tus estudios.

RECOMENDACIONES PARA ESTUDIAR MATEMÁTICAS

Lee el libro lentamente y con cuidado. Si no entiendes lo que estás leyendo vuelve a leerlo. En caso extremo pide la ayuda y asesoría de un compañero, amigo, o maestro que conozca el tema. Cuando llegues a un ejemplo resuelto, ve y sigue con cuidado el ejemplo, después trata de resolverlo por tú cuenta en una hoja aparte.

- ♦ Si piensas que ya conoces algún tema presentado en el libro, de todos modos tienes que resolver sus ejercicios respectivos. Si puedes resolverlos todos, significa que efectivamente lo dominas, sino será necesario repasar el tema.
- ♦ Resuelve todos los ejercicios de cada unidad. Están ordenados de tal manera que cuando termines el último ejercicio de este libro, dominarás los fundamentos de matemáticas y

estarás capacitado para aprender cualquier tema de matemáticas superiores y física o de otras asignaturas.

- ♦ **Actitud positiva y optimista.**
- ♦ **Disposición y mente abierta.**
- ♦ **Atención y concentración.**



EL LUGAR DE ESTUDIO

Tu cuarto de estudio aunque humilde y sencillo, debe estar bien ventilado e iluminado, debe ser confortable y sobre todo ordenado. Las matemáticas es una ciencia exacta y ordenada, por lo que debes organizar no sólo tus pensamientos sino también tu habitación y tus cosas.

Si no tienes un cuarto para estudiar, entonces debes procurar hacer uso de la biblioteca pública o la de la escuela, donde existen muchos libros de la misma materia y que tratan los mismos temas, pero con diferentes enfoques y ejemplos. Yo recuerdo cuando me dejaban resolver algunos

problemas, generalmente en otros libros los encontraba resueltos o algunos eran similares a los de mi tarea.

Acostumbra los buenos hábitos tales como: *lectura, investigación, ajedrez, resolución de problemas, realización de ejercicios, obediencia, respeto, deporte y una actitud alegre y positiva.*

REQUISITOS PARA APRENDER MATEMÁTICAS

En matemáticas, para aprender verdaderamente, primero es necesario que pongas **atención y concentración** a las explicaciones del libro o del maestro cuando estás en un aula, después debes hacer todas las tareas y ejercicios que te dejan. En todo esto, **respetando las reglas de las operaciones aritméticas y algebraicas**, las cuales el estudiante siempre debe tener presentes y firmemente grabadas en su memoria. *Aprender dichas reglas no es difícil, ya que son cortas, sencillas e inmutables.* En esta sencillez radica la belleza y poderío de las matemáticas.

También, debes tomar en cuenta los principios siguientes:

- **La educación es tu trabajo. Como estudiante eres un trabajador**, aunque no recibes

salario por asistir a clases (salvo los que tienen beca), **es necesario trabajar mucho para lograr el éxito**, no pienses que todo se te va dar gratis y sin esfuerzo. La recompensa final pagará con creces todo el trabajo que realices y será proporcional al esfuerzo realizado. Las matemáticas no se aprenden sin trabajo y esfuerzo.

- **La educación significa que cambies.** Si realmente te estas educando, lo notarás porque cambiarás tus conductas y hábitos a medida que vayas aprendiendo. Poco a poco dejarás los malos hábitos y los irás sustituyendo por otros que te darán desarrollo y conocimientos, que te conducirán al éxito en la educación y por lo tanto en tu vida. *Si no cambias significa que no has aprendido.*
- **La educación te proporciona herramientas para que sigas aprendiendo.** *El aprendizaje es un proceso continuo que nunca termina, siempre estarás aprendiendo algo nuevo y siempre mejorarás la habilidad para aprender. Al principio el trabajo es difícil, luego entre más sepas más fácil aprenderás.* Tú como estudiante debes aprender a aprender, es decir, a ser independiente y autosuficiente y por tu cuenta

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 46

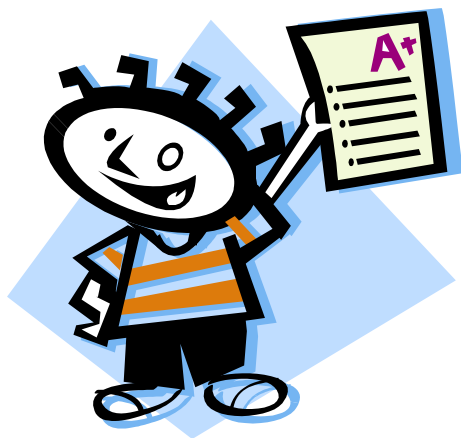
poder conocer cualquier tema que te interese.

- **Es necesario que le dediques tiempo suficiente a la escuela y a los trabajos extraescolares.** Programa tus actividades durante todo el día, no olvides darle **dos horas diarias** a tus actividades extraescolares como: tareas, trabajos de investigación o consulta, lecturas, resúmenes, etc., **Todo lo que hagas hazlo bien, pues Calidad es hacer las cosas bien a la primera.** Cada éxito que vayas teniendo, merece un premio aunque sea sencillo. Procura divertirse un poco, ya que la diversión es necesaria, pero siempre y cuando hayas cumplido primero con tus trabajos escolares.
- **Estudia y resuelve ejercicios durante 1 a 2 horas diarias.** No solo estudies para un examen, sino constantemente, ya **que el estudio en matemáticas debe ser permanente.** En ocasiones le entendemos al libro o al maestro perfectamente, pero después de un tiempo, ya no sabemos nada de este tema. Esto se debe a que el olvido es parte de la memoria y a que no hemos grabado ni cimentado los conocimientos en la memoria permanente, lo cual solo se logra mediante la resolución de problemas y ejercicios.
- **Considera prioritarias las actividades de la escuela sobre**

todas las demás. Si es necesario, busca asesoría con otro maestro o con un amigo. Resuelve las dudas con tus compañeros de clase o con otro profesor de matemáticas.

- **Ten los apuntes completos, limpios y en orden.** El orden es una de las características más importantes de las matemáticas y tenemos que ser ordenados en todos nuestros aspectos si queremos comprenderlas y dominarlas.
- **Debes estar atento y concentrado en la explicación del libro o en clases.** Toma nota de los comentarios adicionales o especiales que se hacen en el libro o por el profesor, ya que en estos detalles muchas veces está el aprendizaje.
- **Consulta los mismos temas en otros libros de matemáticas y resuelve ejercicios semejantes.** Cuando no puedas resolver un problema, en otro libro puede estar resuelto o puedes hallar uno parecido.
- **Asiste a todas las clases y toma completos los apuntes.** Haz completas las tareas y ejercicios de cada unidad del libro o lo que te deje el maestro.
- **Reconoce que eres responsable de tu aprendizaje y por lo tanto de la calificación que**

obtengas. A mayor esfuerzo y trabajo mayor calificación. Primero procura aprender. La aprobación será una consecuencia del aprendizaje. **Quita la barrera mental que opones al aprendizaje de las matemáticas, pensando que son difíciles y odiosas.** Piensa siempre en forma optimista y trata de ver en la sencillez y orden la belleza e importancia de las matemáticas.



- **Todo ser humano tiene derecho de recibir una educación digna,** pero también la obligación y el compromiso de estudiar y comprometerse a realizar todas las tareas que como educando le asignen.
- **El que tengas éxito en tu educación,** implica necesariamente que debes tener éxito en tu vida profesional, personal y familiar.

- **Toma la decisión importante hoy, decídette ya, porque mañana será demasiado tarde.** Muchos cuando ya están casados o cuando ya no hay remedio porque tienen muchas materias reprobadas, desean estudiar o continuar sus estudios. Tu oportunidad es ahora, no la desaproveches, más adelante ya no habrá remedio.
- **Haz todas tus actividades escolares con gusto y alegría.** Recuerda que la recompensa aunque tarde llegará con creces.

DECISION Y CARACTER
ATENCION Y CONCENTRACION
ALEGRIA Y OPTIMISMO
BUENA SALUD
SIN VICIOS
DEPORTISTA

Los requisitos para aprender matemáticas implican tener ganas y deseos de hacer las cosas. Ser una persona que se quiere a sí misma, sana, deportista y alegre.

Nota que dentro de los requisitos principales para aprender matemáticas y cualquier otra asignatura o actividad, no se pone a la **inteligencia** como primordial,

ya que todos tenemos la capacidad suficiente o de sobra para aprender matemáticas y por lo tanto para lograr una Carrera Profesional. Los únicos que no, son los locos o los que tienen algún otro desequilibrio mental.

La **inteligencia** se define como la **capacidad de resolver problemas**. En las matemáticas siempre estamos resolviendo problemas y ejercicios, los cuales nos ayudan a aumentar nuestra inteligencia. Un **problema** es una situación de la vida real, que requiere nuestra atención. Para que sea problema tiene que tener dos o más soluciones o explicaciones, ya que sino tiene solución o explicación será un imposible y no un problema, y si solo tiene una solución entonces se aplica y el problema deja de existir.

La humanidad siempre está resolviendo y enfrentando problemas, ya que no sólo en matemáticas se resuelven problemas, sino en cualquier otra ciencia y sobre todo en muchas situaciones de la vida real. Por esta razón, **las personas que sepan resolver problemas serán las que destacarán en la sociedad**. Las matemáticas, más que ninguna otra ciencia, nos ayudan a razonar, entender, comprender y solucionar problemas. El saber resolver problemas será el requisito fundamental para poder trabajar en la sociedad tecnológica del Siglo

XXI.

"Ningún físico ni matemático ha nacido con operaciones y fórmulas en su cabeza, sino que debieron estudiarlas concienzudamente para aprenderlas, si ellos pudieron, nosotros también"

S A B E R C Ó M O A P R E N D E R

Para aprender el primer requisito es desearlo fuertemente, sentir la necesidad y estar dispuesto a realizar el esfuerzo para lograrlo. Aprendemos cuando a lo que hacemos le ponemos pasión.

Lo que principalmente impide el aprendizaje son: no saber leer y comprender, ó pensar que ya sabes. Cuando crees que sabes y que no necesitas aprender, bloqueas tu mente y le impides que aprenda. Debes ser sencillo y humilde y siempre estar dispuesto a aprender, ya que así predispones tu mente para que esté abierta al nuevo aprendizaje.

Todos somos inteligentes pero también somos ignorantes, ya que los conocimientos son infinitos y no es posible que sepamos todo; pregúntale a un científico de deportes, política, economía o algún otro tema que no sea de su área y verán que es un ignorante, aunque sea muy brillante y capaz

en su área científica. Esto no significa que sea un tonto, es muy inteligente, pero algunos temas los desconoce.

También, **otra de las grandes barreras del aprendizaje es pensar que no tenemos la capacidad para aprender.** Esto impide enormemente que aprendamos, ya que con esto cerramos nuestra mente al aprendizaje. Estar alegre, optimista y dispuestos a aprender, es dar el primer paso en este proceso.

Como punto de inicio es necesario valorarnos sinceramente, creer en nosotros mismos, conocer nuestras fuerzas y debilidades –las que todos tenemos--. Si nos consideramos menos aptos y más débiles que otros, debemos estar conscientes de que tendremos que trabajar más, pero que después al igual que los demás, estaremos en la cima del éxito.

*Para aprender cualquier tema o asignatura, es necesario que tengamos un fuerte interés y deseo por aprender, ya que sino sentimos la fuerte necesidad interior de lograr nuevos conocimientos, jamás aprenderemos. **La autoestima (el querernos y valorarnos a nosotros mismos), la auto motivación (el saber y creer que si podemos) son indispensables para tener éxito en la escuela y en la vida misma.*** Debemos estar conscientes de

nuestra capacidad y jamás dudar que podemos aprender cualquier cosa que nos propongamos firmemente.

“El interés y determinación rompen cualquier barrera y no existen obstáculos invencibles, cuando estamos decididos y motivados a vencerlos”.

Lo más difícil para aprender matemáticas, es romper la barrera mental que nos impone el temor y odio que sentimos hacia ellas, después de esto todo es más fácil. Pero **¿Cómo rompo esta barrera mental?** Muy sencillo, primero tienes que escribir 3 veces en tu cuaderno **“Sí Puedo, es fácil y lo voy a aprender”**, después lo pronuncias 3 veces en voz alta y fuerte y es todo. Esto siempre hazlo antes de estudiar cualquier tema o antes de resolver un ejercicio. Hazlo y por increíble que parezca funciona perfectamente. Funciona porque “programas” la mente subconsciente –el inconsciente, que es nuestra “computadora interna”—para que así lo entienda y lo ejecute.

Para tener éxito es necesario pensar positivamente, cambiar nuestros pensamientos negativos tales como: *no puedo, no soy muy inteligente, no soy capaz, es difícil,* por pensamientos optimistas tales como: **yo puedo, tengo la inteligencia suficiente y soy capaz.**

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 50

Reemplaza las palabras *tengo qué, debo, dime, trataré, mi intención es*, por **quiero hacer, decido, digo, haré y me comprometo**. Las primeras significan que haces las cosas por que alguien te las dice y las segundas por que tú quieres hacerlas. **Hasta que a nosotros nos nace el deseo y necesidad de aprender algo, es cuando podemos aprender.**

Por cualquier éxito que logres por pequeño que sea, anótalo y felicítate, ya que esto significa que estás en la dirección correcta y cada logro te ayudará a creer en ti mismo. Todos podemos tener éxito en la medida en que creemos en nosotros mismos y si después hacemos lo suficiente para lograrlo. Si no nos esforzamos, no llegaremos a la cima de los triunfadores y desde abajo contemplaremos a los que han logrado la victoria y el triunfo.

Una actitud positiva abre la mente al aprendizaje y una actitud negativa la cierra. Júntate con gente optimista, que va bien en la escuela y que ya ha aprendido matemáticas y pídeles ayuda y consejos. Lo mediocre se pega, si lo dudas, observa como los mediocres reprueban o se hunden en grupo. Lo mismo pasa con el éxito, se pega, se contagia, por esto, únete a la gente que ha triunfado.

Para tener éxito como estudiante es necesario querer y amar nuestros estudios, nuestra escuela, nuestro maestro, nuestra familia y a nuestros compañeros. Todo lo que hagamos debemos hacerlo por que nos gusta; ya que así lo hacemos mejor y con más responsabilidad. Nuestros padres con toda el alma desean que estudiemos y logremos alcanzar una Carrera Profesional, ya que ellos como padres comprenden que es una necesidad y es indispensable para abrirse paso en la vida. Esto es verdad, ya que si quieres progresar y ayudar a tu familia y a tu nación sólo con un oficio o profesión lo podrás hacer.

Nuestros padres quieren que salgamos adelante, no para que los ayudemos económicamente, sino únicamente por nuestro bien. Para ellos su mayor orgullo y felicidad es que seamos profesionales y que logremos abirnos paso en la vida con la herramienta que ellos nos dieron. Con eso se dan por satisfechos. Ve cuan felices y orgullosos se sienten cuando saben que vas bien en la escuela. En cambio, cuando estás reprobado y no estudias, que dolor y desilusión tan grande les causas. Si quieres a tus padres debes darles sólo alegría y felicidad.

Debes estar consciente de que tus estudios son tu futuro. El único beneficiado o perjudicado eres tú. El beneficio de dichos estudios es directamente para el estudiante.

Debes tener presente esta situación y no jugar con tu vida. **Debes ser responsable de tus acciones, las cuales si fueron buenas te beneficiaran en el futuro y sino te cobrarán caro los errores cometidos.**

Ciertamente, beneficiamos indirectamente a nuestros padres, *haciéndolos sentir orgullosos cuando obtenemos buenas calificaciones en la escuela y les rompemos el corazón cuando reprobamos.* También, ayudamos a nuestra ciudad, municipio, estado y país, cuando somos mejores ciudadanos.

 **Escriba 5 cosas que crees te pasarán si aprendes matemáticas**

 **Escriba 5 cosas que crees te pasarán si no aprendes matemáticas.**

Las matemáticas no son más difíciles que las demás materias, lo que pasa que **si requieren más**

atención y concentración que todas ellas. Por esto, puede decirse que son menos fáciles al principio, mientras aprendemos a ordenar y concentrar nuestro pensamiento, después es la materia más fácil del universo, ya que todo lo que se necesita es aprender sus cortas y sencillas reglas o leyes, las cuales nunca cambian. La mayoría de nosotros tenemos dificultad para escuchar y para concentrarnos, por eso algunas asignaturas se nos hacen difíciles. Practiquemos la observación y la atención, seamos detallistas, dedicados y responsables y obtendremos el triunfo en todo lo que hagamos. **La observación** es el primer paso del método científico y es el primer paso para aprender, aprendamos a ser observadores y aprenderemos cualquier cosa que nos propongamos.

Louis Agassiz nació en Suiza, pero llegó a los Estados Unidos de America en 1846, aceptó un puesto de docente en la prestigiada Universidad de Harvard. Ahí desarrolló un original método de instrucción que dio a sus alumnos la oportunidad de aprender a pensar por si mismos y a resolver sus propios problemas.

Scudder, uno de los alumnos de Agassiz que luego alcanzó casi la misma notoriedad como docente, sintetizó así el método de Agassiz:

Hace mas de quince años entré al

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 52

Laboratorio del profesor Agassiz... Me hizo algunas preguntas acerca del propósito que me había llevado allí...

—¿Cuándo desea empezar? Me preguntó.

—Ahora mismo, le respondí.

Eso pareció complacerle, y respondiendo con un enérgico —Muy bien—, tomó de un estante una enorme vasija que contenía un espécimen en formol.

—Tome este pez—, dijo, —y mírelo...de vez en cuando le preguntaré que ha visto—. Diez minutos más tarde había observado todo lo que podía verse en ese pez y salí a buscar al profesor, pero ya se había marchado del laboratorio... Pasó media hora, una hora, otra hora más; el pez me empezó a resultar repugnante. Le daba vueltas y vueltas; lo miraba de frente, y me parecía horrible; por detrás, abajo, encima, de costado, tres cuartos de perfil, y seguía pareciéndome horrible. Estaba desesperado; un poco antes de la hora acostumbrada, decidí que era hora de almorzar, de modo que, con gran alivio deposité la vasija y por una hora me sentí libre.

Cuando regresé supe que el profesor había vuelto, pero ya se había marchado y no volvería hasta dentro de una hora... Lentamente volví a tomar ese odioso pez, y con una sensación de desesperación volví a contemplarlo... metí un dedo en su garganta para sentir el filo de su

dentadura. Empecé a contar las innumerables escamas en sucesivas hileras, hasta que me convencí que eso era estúpido. Finalmente, se me ocurrió dibujar el pez, y entonces, con sorpresa empecé a descubrir nuevos rasgos en la criatura.

Justo en ese momento regresó el profesor.

—Correcto—, dijo,—el lápiz es uno de los mejores ojos. Pues bien ¿A que se parece este pez?—

Escuchó atentamente mi breve presentación... Cuando terminé, quedó a la expectativa, como si esperara que siguiera, y luego, con actitud de desilusión, señaló:

—No ha mirado usted con suficiente atención... ¡Vuelva a mirar! ¡Vuelva a mirar!— Y me abandonó otra vez en mi miseria... Me animé a preguntarle que tendría que hacer a continuación.

—Simplemente observe al pez— dijo... Y por otros tres largos días volvió a colocar el pez ante mis ojos, prohibiéndome que mirara cualquier otra cosa o que usara cualquier recurso artificial para mi observación. —Mire, mire, mire—, esa era su reiterada orden.

Fue la mejor clase que jamás tuve, una lección que se ha expandido a todo lo que después aprendí. Un legado de inestimable valor que nos dejó el profesor y que nunca podríamos comprar y del que nunca nos desprenderíamos jamás.

Muchas veces no aprendemos matemáticas y otras asignaturas

porque no observamos, no nos tomamos el tiempo suficiente para observar cuidadosamente, para buscar más y más. Siempre podremos percibir más y más, si tan solo nos tomamos el tiempo para hacerlo.

UNIDAD VI ¿POR QUÉ DEBO ESTUDIAR MATEMÁTICAS?

Me encantan las preguntas y considero que el “*Método de las interrogantes*” es la mejor manera de aprender. Consiste en hacerte una pregunta, tal como ¿Qué? ¿Por qué? ¿Para qué? ¿Cómo? ¿Cuál? ¿Dónde? Y buscar por todos lados la respuesta. Después, puedes plantearte otra pregunta, buscar su respuesta y así sucesivamente. Es un método fabuloso donde verdaderamente aprendes y te vuelves un explorador e incluso un investigador. Qué te parece si antes de contestar esa pregunta, lees la noticia siguiente que apareció en el diario Ovaciones, el día 19 de junio de 1999, en su sección internacional.

PIERDEN 70 MILLONES DE DÓLARES POR UNA COMA MAL COLOCADA

Londres, 18 de junio (AP).- Lockheed Martin Corp. , Perdió 70

millones de dólares, porque una coma en un contrato de ventas estaba colocada en el lugar erróneo.

El diario The Financial Times dijo que un contrato internacional para la venta del avión Hércules C-130J, que fabrica Lockheed Martin, tenía una coma colocada erróneamente por un punto decimal en la ecuación que ajustaba los precios de venta según cambios en la tasa de inflación.

Se trató de un error, dijo el diario, citando a James “Micky” Blackwell, presidente de la división de aeronáutica de la Lockheed. Pero el cliente que Lockheed no identificó, insistió en el precio.

“Esa coma costó a Lockheed 70 millones de dólares”, dijo Blackwell, de acuerdo al diario.

En el sistema inglés, las comas representan los millares y el punto los números decimales. En el sistema español, en cambio los millares se separan con el punto y los decimales con la coma.

Por no saber matemáticas, considerando un tipo de cambio de \$10.00 pesos por un dólar, este error le costó 700 millones de pesos a la compañía Lockheed Martin. Si en el mundo lo que más se manejan son cantidades de dinero, en operaciones de compra-venta ¿No será muy importante saber matemáticas?

Si se puede decir que todo en el

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 54

mundo gira alrededor de las matemáticas ¿porqué a los estudiantes no les gustan y a toda costa tratan de evitarlas? *Bueno, la respuesta está en su mala fama, en la **mala publicidad** que le han hecho;* Todo mundo dice que las matemáticas son difíciles; La mayoría de los maestros de matemáticas, no saben matemáticas y algunos que saben no saben enseñarlas. Esto ha provocado la mala fama de las matemáticas, pues los **malos maestros** que la enseñan así se las hacen sentir a los estudiantes, quienes piensan **¿Qué difíciles han de ser las matemáticas que ni los mismos maestros las dominan?** Los alumnos de grados superiores así lo dicen, hasta los padres de familia lo consideran así.

Pero ¿Será verdad que las matemáticas sean difíciles, sólo por que todos lo dicen? Pero, si son difíciles ¿Por qué no las han desaparecido?; ¿Por qué existe muchísima gente que le gustan y la dominan? ¿Por qué en todos lados están y se utilizan? ¿Por qué hay muchas personas que dedican su vida entera a estudiarlas y a aportar nuevos conocimientos? ¿Por qué no han inventado algo más fácil? **Simplemente, porque no hay nada más sencillo y útil que las matemáticas.** En todos los empleos se utilizan. En todas las carreras universitarias se estudian. En todas las computadoras se usan y en todo lo que sea eléctrico

ó electrónico.



Si adquiriste este libro es para lograr aprender matemáticas y dominarlas para siempre. Pero si anteriormente no tuviste éxito, ¿No será el momento de cambiar totalmente tu actitud, tu manera de pensar y tus hábitos? Incluso cambiar hasta tus compañeros con los que más te juntas, que tu les llamas *amigos*, pero que en realidad sólo te han perjudicado en tus estudios y en tu vida. No es necesario que cambies de grupo, ni de escuela, ni de ciudad; **¡se necesita que cambies tú! Las matemáticas no se aprenden si tú no quieres, jamás nadie aprendió algo que no quiso.** Si no te ha funcionado lo que has hecho anteriormente, es porque como lo haces no sirve, no trabaja. Ahora, date una nueva oportunidad y sigue mis consejos; yo voy a demostrarte que eres un exitoso y un triunfador, pero necesito que me des la oportunidad suficiente,

que consiste en que estudies completas todas las unidades que componen el libro y resuelvas los ejercicios propuestos.

Ahora, regresando a la pregunta **¿Por qué debo estudiar matemáticas?** La respuesta es: porque están en todas partes; por lo tanto, también están en todos los estudios. Pero **¿Por qué debo estudiar?** Bueno, debes hacerlo por que la sociedad así lo exige. Vivimos en sociedad y nadie puede vivir fuera de ella. La sociedad nos exige que estemos bien preparados y educados para desempeñar algún trabajo o actividad dentro de ella. Entre mejor preparados estemos, mejores ingresos podremos obtener y lograr un mejor nivel de vida. ¿A quién beneficio o perjudico, si estudio o no? El único beneficiado o perjudicado directamente serás tú, ya que lo que está en juego es tu futuro. Si fracasas, tus padres se sentirán tristes y defraudados. Si tienes éxito, estarán contentos y satisfechos de haber cumplido con la misión de haberte formado en la vida. **Si tienes éxito o fracaso serás el único culpable.**

Todos los estudiantes se hacen las mismas preguntas. ¿Por qué los adultos quieren que estudiemos, si a nosotros ni nos gustan los estudios? Porque ellos saben como es la vida y que para tener éxito es necesario estar bien preparados. Tus padres quieren lo mejor para ti y por eso se preocupan y quieren

que te prepares y aprendas mucho en la escuela.

Ahora, déjame ampliarte la respuesta a esa tan importante pregunta. Solo espero que me des la oportunidad de contestarte cabalmente y mostrarte la belleza e importancia de las matemáticas.

El primer paso para aprender, es desear hallar respuestas a nuestras dudas. **Cuando te planteas dudas o preguntas de algo, ya estás aprendiendo.** Esa es una de las mejores maneras de iniciar el aprendizaje, pero debes buscar e investigar hasta encontrar respuestas a todas tus interrogantes, para concluir así con éste proceso. Un buen inicio es lo mejor, pero no es suficiente sino se concluye de la misma forma.

La respuesta a la pregunta inicial es: **porque las matemáticas están en todos lados**, aunque a veces no las reconoces porque no las ves como te las enseñan en la escuela. Las matemáticas en el mundo que te rodea a veces parecen invisibles, pero están presentes todo el tiempo, no sólo en la escuela, sino también, en los lugares de trabajo, en nuestras casas, en los bancos, en el supermercado y en la vida en general, por ésta razón, **debes ver las matemáticas no sólo como parte de la escuela, sino como parte de tu vida.**

Puedes preguntarte, ¿Cómo

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 56

aparecen las matemáticas en mi vida diaria? Aunque no seas un estudiante del área físico-matemática o químico-biológica, mucho menos un ingeniero, un contador o experto en computación. A pesar de esto, las matemáticas están en tu vida desde que te levantas hasta que te duermes. Utilizas las matemáticas siempre que ves la hora de tu reloj, cuando compras o vendes mercancías, cuando recibes o entregas dinero, cuando vas al banco, cuando realizas operaciones con cantidades, cuando ves o mides alguna figura, cuando preparas una receta de cocina, cuando llevas el marcador de un evento deportivo, cuando preparas un informe o tarea, cuando lees el periódico o una revista, cuando ves televisión, etc. **Podemos decir que sin matemáticas el mundo no podría funcionar, de ahí su importancia.**

Cada vez que te haces una pregunta que implica cantidad o forma, estás usando matemáticas. Por ejemplo: ¿Tengo suficiente pintura para pintar todo mi cuarto? ¿Me dieron el cambio correcto? ¿Tengo dinero suficiente para comprar este objeto que quiero?, etc.

En una ocasión, a los alumnos que habían reprobado matemáticas les pregunté las causas de su reprobación, ellos entre otras cosas argumentaron que las matemáticas

solo son una serie de símbolos y que no tienen ninguna aplicación en la vida real, “sólo las usan para reprobarnos”. Entonces les propuse que me escribieran 10 actividades o cosas que no implicaran matemáticas para su creación o utilización, que sino les detectaba al menos una cosa que tuviera que ver con las matemáticas, aprobaban el curso. Sobra decir que todos fracasaron, ya que todo lo que sea físico, químico, biológico, económico o social implica matemáticas. Así que casi no existe algo que se escape de la influencia de las matemáticas, entonces **¿por qué no aprenderlas y dominarlas?**

Si no son de tu agrado las matemáticas, aquí te doy algunas ideas para que medites. Las matemáticas proporcionan un nivel intelectual muy importante, el cual todos necesitaremos en un futuro, debido principalmente al avance tecnológico en el mundo. Es importante motivarnos para que lleguemos a ser **buenos matemáticos, quienes actualmente son los que analizan, razonan y resuelven problemas.**

Las matemáticas son un área fácil para todo el mundo. No es una materia que los hombres puedan dominar mejor que las mujeres. Hombres y mujeres tienen el mismo gran potencial para las matemáticas. Al final del libro

están algunos nombres de hombres y mujeres que han destacado en matemáticas ¿Quieres anexar tu nombre a ésta lista?

Todos necesitamos matemáticas, aún los artistas también las necesitan. Ellos las necesitan no sólo para sobrevivir en el mundo, sino que cada área de las bellas artes requiere un entendimiento profundo de matemáticas, desde algo tan obvio como el tamaño de un lienzo, o las notas de la música, o el número de asientos en una audiencia, hasta el arte generado por computadora.

Las calculadoras y las computadoras requieren que tengamos un alto nivel de conocimientos en matemáticas. Su presencia no significa que hay una menor necesidad de aprender matemáticas. Las calculadoras demandan que la gente tenga altos niveles en matemáticas y que ellos puedan hacer las operaciones matemáticas en su mente. Debido a que una calculadora es solo tan precisa como la persona que la utiliza. Puede calcular, pero no puede pensar. Además, nosotros debemos ser los pensadores. Debemos saber que respuestas son razonables y que respuestas son extrañamente grandes o pequeñas. Los matemáticos debemos tantear, que es la capacidad de estimar o calcular anticipadamente los resultados aunque en forma aproximada.

Por ejemplo, las calculadoras sencillas, que no disponen de funciones matemáticas, al problema ¿Cuánto resulta al hacer la operación $9 - 3 \times 4 = ?$ Dan como respuesta 24, en lugar de la verdadera que es -3 . Increíblemente, de 100 personas encuestadas con este sencillo problema, solo 10 dan la respuesta correcta y 90 de ellas responden 24, igual de incorrecto que las calculadoras sencillas. Las calculadoras científicas todas responden correctamente con -3 como respuesta, debido a que conocen **las leyes y reglas de las matemáticas, las cuales si las aprendemos bien, siempre responderemos correctamente a cualquier tipo de operación matemática.** Más adelante veremos el tema de Jerarquía de las Operaciones, con él podrás realizar correctamente las operaciones.

Las actitudes positivas respecto a las matemáticas son importantes para nuestro país. México para que logre ser una nación industrial avanzada requiere que sus estudiantes tengan grandes niveles en matemáticas, por lo que los matemáticos son la clave para nuestro futuro.

Las características de los empleos están cambiando rápidamente. Ya no se pide personal con niveles computacionales básicos, sino con

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 58

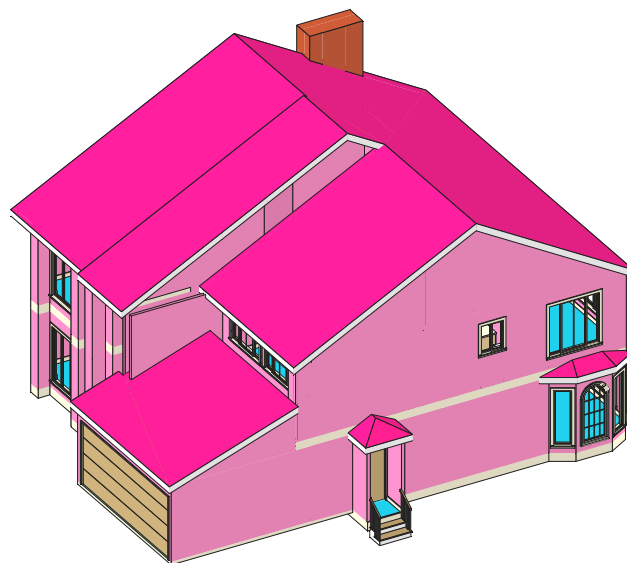
altos niveles en matemáticas y computación. Ahora los trabajadores deben ser hábiles para estimar, para comunicarse matemáticamente y para razonar dentro de un contexto matemático. Porque nuestro mundo está orientado tecnológicamente, los empleados necesitan tener altos niveles de razonamiento y tener la capacidad de solucionar problemas en forma rápida.

Los trabajadores modernos necesitan ser confiables en matemáticas. Actualmente se trabaja más con nuestra mente que con el cuerpo. A partir del año 2000, empezó el **“Siglo de la Información”** y en él *nos ganaremos el pan con el sudor de nuestra mente*, en lugar del sudor de la frente. En dicho siglo, quien tenga los conocimientos y la información tendrá el poder.

LAS MATEMÁTICAS Y LOS ESTUDIOS

Para poder estudiar una Carrera Profesional, primeramente debemos concluir el Bachillerato y antes debimos haber terminado la Secundaria. No existe ninguna Secundaria ni Bachillerato donde no se lleven al menos tres cursos de matemáticas. **Así que sino podemos evitar las matemáticas, entonces debemos afrontarlas y dominarlas.** No tenemos ninguna otra opción, ni podemos escapar de ellas, así que ¿Por qué no abordar

las matemáticas con optimismo y alegría, con confianza y una gran dedicación? ya que si lo hacemos así tendremos el éxito asegurado.



Si consideramos que no servimos para las matemáticas, entonces no servimos para estudiar, ya que las matemáticas están por todas partes y en todos los estudios. Entonces mejor debemos dedicarnos a trabajar. Como para los trabajos mentales no nos consideramos capacitados, debemos buscar trabajos físicos, tales como peón, taxista, cargador, albañil, carpintero, plomero, pintor, etc. Aunque aun así no podremos escaparnos de ellas, ya que en estos oficios también las utilizaremos al manejar dinero, medidas, figuras, pesas o cantidades en general. ¿Qué figuras y que fórmulas utilizará un albañil, herrero o carpintero al

construir la casa anterior? Estos oficios no son malos ni indignos, en ocasiones ganan más que un profesionista, desafortunadamente, estos trabajos son muy pesados y algunos de ellos mal pagados, pero para desempeñar estos oficios de todos modos requieres dominar matemáticas básicas.

Ciertamente, el estudiar una Carrera Profesional no significa que te vas a hacer rico, pero si tendrás mejores elementos para abrirte un buen futuro en la vida. Por las condiciones económicas de nuestro país, es difícil encontrar empleo, pero esto ocurre principalmente para los profesionistas mal preparados o que estudiaron carreras saturadas, tales como Licenciado en Derecho, Licenciado en Economía, Licenciado en Filosofía, etc. Actualmente existen grandes oportunidades de empleo, para aquellos que estudiaron carreras técnicas tales como Ingeniería, Computación, Física, Química, etc.

No conozco ningún profesional bien preparado que no tenga o encuentre trabajo. Debemos prepararnos bien, ya que existe una gran competencia, donde sólo sobreviven los más capacitados. Ya pasaron esos tiempos donde el objetivo era aprobar y conseguir un título, después un familiar, amigo, compadre o padrino nos conseguía un empleo en el gobierno y asunto arreglado. Las leyes mexicanas

prohíben estrictamente esta situación, la cual cada vez está siendo más respetada y sólo están contratando al personal más calificado, mediante concurso o examen de oposición.

Hay muchachos que dicen *“yo no aprendí nada en la Secundaria y sin embargo aprobé, no sé ni como le hice”*. Esto significa que aprobaron mediante trampas y engaños y que en realidad no saben nada. Podrán seguir aprobando algunas materias más mediante éste método falso, pero llegará el momento que no podrán avanzar sino han aprendido y entonces se frustrarán o lamentarán por no haber aprovechado el tiempo. Para este tipo de muchachos también he escrito este libro, para que corrijan este grave error, ya que lo primero debe ser el aprendizaje y el conocimiento, la aprobación es una consecuencia inmediata y automática, ya que hay una ley que dice *“Que el que sabe, jamás reprueba”*.

La reprobación origina deserción escolar y por lo tanto ésta origina el fracaso escolar, el cual a su vez provoca la frustración en todos los aspectos de la vida. Todo esto se pudiera haber evitado, si el alumno hubiera tenido éxito en matemáticas, física, química e inglés. Que son en este orden las áreas de mayor índice de

reprobación. **Obviamente el éxito requiere de trabajo y esfuerzo, ya que por si solo jamás llega.**

Hay gente que estudia desesperadamente y no consigue el éxito, debido a que no estudia correctamente, *ya que solo debe estudiarse cuando estás motivado lo suficiente, puedes concentrarte y estás dispuesto a aprender.* **Sólo aprendemos cuando de verdad queremos hacerlo.**

Este libro hace énfasis en tres aspectos fundamentales: motivación, ejemplos y ejercicios. Estos últimos deben realizarse todos correctamente y en el orden en que aparecen en el libro, ya que las matemáticas tienen una secuencia lógica bien definida. Te recomiendo no avanzar al siguiente tema hasta haber completado todos los ejercicios del tema anterior.

¿PUEDO EVITAR LAS MATEMÁTICAS EN UNA CARRERA PROFESIONAL?

Probablemente no, ya que casi no existen carreras profesionales que no incluyan al menos dos cursos de matemáticas y computación. Algunas carreras que antes no incluían

matemáticas, debido a su importancia, actualmente ya incluyen al menos dos cursos. Platicando con un ex-alumno egresado del bachillerato químico-biológico, me comentaba que estaba estudiando el quinto semestre de la carrera de Medicina, que había escogido esta carrera porque deseaba evitar las matemáticas, pero que no lo había logrado, ya que se utilizaban muchas fórmulas en diversas materias, para calcular las dosis de medicamentos, los volúmenes de sueros, sangre e inyecciones, la cantidad de anestésico, pero sobre todo mucha estadística.

Hay muchos alumnos que como él, al terminar su bachillerato no quieren saber más de las matemáticas, así que buscan –sin éxito-- carreras profesionales donde no se lleven matemáticas.

En una ocasión, un alumno a punto de terminar su Bachillerato, me pidió que le dijera el nombre de una Carrera Profesional donde no se llevaran matemáticas, ya que él no era bueno en esta materia, como según él a mí me constaba; aunque debo reconocer que este alumno no obtenía muy buenas calificaciones, ya que era muy distraído, callado y nervioso. Sin embargo, nunca reprobó y cuando lo pasé varias veces al pizarrón, siempre pudo resolver los problemas planteados, asombrándose él mismo de su gran

capacidad, pero por lo visto él seguía sin convencerse como muchos otros alumnos, de que si se decidía podría fácilmente dominar las matemáticas.

Opté por recomendarle la carrera de Licenciado en Filosofía, ya que supuse que dicha carrera no tenía ninguna materia relacionada con las matemáticas.

Después de dos años, este alumno fue a visitarme para reclamarme que es falso que no se lleven materias de matemáticas en la Escuela de Filosofía, ya que en esa carrera llevan dos cursos de matemáticas básicas, uno de los cuales incluye estadística.

La recomendación para que el muchacho estudiara Filosofía, la hice sin consultar su plan de estudios, solamente en la suposición de que en este tipo de carreras no se llevan matemáticas. No le quise recomendar la carrera de Licenciado en Derecho, puesto que sé perfectamente que los abogados tienen que leer muchísimo y ocupan constantemente herramientas matemáticas tales como: cálculo de áreas, distancias y orientaciones de terrenos para elaborar escrituras o en pleitos de deslinde o posesión; cálculo de porcentajes en herencias, sueldos e impuestos; cálculo de distancias y ángulos en la posición de un accidentado o un cadáver; cálculo del valor de bienes

muebles e inmuebles; cálculo del monto de un robo; cálculo del monto de deudas y sus intereses generados, etc. Generalmente, el abogado recurre a los peritos en estas áreas, pero él tiene que saber interpretar la información para poder defender acertadamente a sus clientes.

Un caso sorprendente me ocurrió en 1985, cuando trabajaba como residente de obras en el H. Ayuntamiento de Chilpancingo, Gro. Un amigo mío me preguntó que podía hacer para que su hijo fuera a la escuela, ya que había intentado todo y no lograba convencerlo, siempre terminaba golpeándolo tan feo que lo mandaba al hospital, pero aún así no lograba que fuera a la escuela.

Le dije que si el muchacho no quería estudiar, pues que mejor se dedicara a trabajar. Que me lo mandara a la obra del Paso a Desnivel, ahí le íbamos a dar trabajo de peón, era lo único en que podía trabajar, debido a que no tenía estudios de secundaria ni preparatoria, por lo tanto, no le podía dar un empleo menos pesado.

Mi amigo aceptó, diciendo que eso era lo que quería, puesto que no le gustaba ir a la escuela. El lunes a las 7:00 de la mañana el muchacho se presentó con el maestro de obras, el cual ya tenía instrucciones de asignarle trabajo

de peón, encargándole que trajeran primero los bultos de cemento y luego junto con los demás peones hiciera la mezcla de concreto. Después con la carretilla y en latas deberían llevarla hasta donde se estaba colando.

Este trabajo además de mal pagado, es demasiado pesado, ya que lo realizan en el sol caliente, cargan cosas muy pesadas, andan con la ropa y cabellos llenos de mezcla, el cemento y la cal les pela las manos y además tienen que comer al aire libre.

El lunes siguiente le pregunté a mi amigo, porque su hijo ya no se había presentado a trabajar, contestándome que en la mañana había visto a su hijo entrar a bañarse, y cuando él le preguntó que para que se bañaba, si en el trabajo de todos modos se iba a ensuciar, respondiéndole el muchacho que no iba a ir a trabajar, que se estaba bañando para ir a la escuela, ya que los trabajos de peón o albañil son demasiado pesados y mal pagados.

De esta manera mi amigo solucionó su problema. Cuando el muchacho sintió lo duro del trabajo físico, decidió que era mejor estudiar mucho y que ese tipo de trabajos pesados se los dejaba a los que no estudian.

UNIDAD VII

LA BELLEZA DE LAS MATEMÁTICAS

¿Puede algo difícil, aburrido e inútil ser bello? Por supuesto que no. Afortunadamente las matemáticas no tienen ninguna de estas características, a pesar de que así no los han hecho creer por mucho tiempo, tanto que la mayoría de las personas así las considera, ya que a veces las costumbres las hacen leyes, aunque sean falsas. Las matemáticas, independientemente de quien las use son bonitas, sencillas, divertidas, útiles en la vida diaria, son la base de la vida en este mundo. Todo es matemático o gira alrededor de ello.

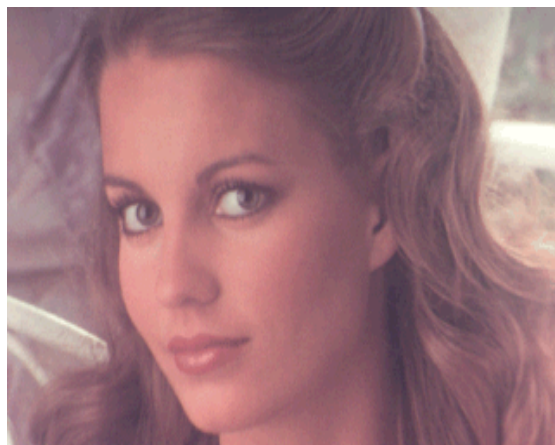
Las matemáticas no tienen la culpa que las enseñen maestros que no saben matemáticas, que te las hacen aburridas y difíciles; que haya libros que antes de enseñarte matemáticas te enredan con otros temas que no tienen nada que ver con el tema en cuestión, que además son fríos, aburridos, serios y sin aplicaciones a la vida real.

En conclusión, las matemáticas son las menos culpables de que las hayan mal etiquetado como difíciles y aburridas. Es increíble como la base de la vida en este

mundo puede considerarse así. Por suerte, existen muchos que como yo han descubierto la belleza de las matemáticas y nos hemos dado cuenta que no sólo son bellas, sino que producen belleza. Por ejemplo, lo que en la antigüedad se consideraba como lo más bello y estético, las siete maravillas del mundo antiguo son producto de las matemáticas. Para diseñar una sola columna de mármol, se requiere no solo de geometría, sino de cálculos para determinar su tamaño y su resistencia.

Otro ejemplo, lo constituye el genial Leonardo Da Vinci, quien utilizaba la sección áurea en el tamaño de sus esculturas y al dividir los lienzos de sus pinturas, cuyo valor es 0,6180339, es decir, dividía sus lienzos y moldes en este valor y no a la mitad (0.50) como lo hacían los demás artistas. Encontró que el ser humano está dividido en esta razón, considerando como centro el ombligo y por eso la llamó *proporción divina*.

Alguien dijo que las matemáticas son como las mujeres, “*muy bonitas pero difíciles de entender*”. La belleza de ambas es indudable, lo que es falso es la dificultad de entenderlas, ya que si las matemáticas se estudian bien, se consigue conocerlas y hasta dominarlas.



Se han comparado las mujeres y las matemáticas, por ser las dos cosas más bellas y útiles del mundo. La belleza de las matemáticas no consiste en un rostro bello ni en una figura bonita, sino más bien **en su orden, sencillez y permanencia de sus leyes y principios**. Las matemáticas se estudian por partes y en orden. Primero, en la Secundaria estudiamos **Aritmética**, después **Álgebra**, luego **Geometría** y **Trigonometría**, más tarde **Geometría Analítica** y en el Bachillerato, debido a su importancia se vuelven a repetir estas asignaturas y, además, se llevan dos semestres de **Cálculo Diferencial e Integral** o **Probabilidad y Estadística**.

La belleza de la mujer la encontramos por todos lados, en el hogar, en la escuela, en la calle, en la playa, en las tiendas, en el teatro, en el cine, en las revistas, en los comerciales de TV, en las telenovelas, etc. Prácticamente

están por todas partes, lo mismo ocurre con las matemáticas, siempre las estás utilizando aun sin darte cuenta. Por ejemplo, al usar dinero en todas las operaciones de compra y venta que realizas, al usar números, al usar formas geométricas, al usar computadoras, calculadoras, aparatos eléctricos y electrónicos (internamente funcionan o fueron diseñados con matemáticas) y en general, al usar cualquier tipo de cantidades y en todas las actividades escolares.

Prácticamente desde que te levantas hasta que te duermes usas matemáticas. Al levantarte lo primero que ves es el reloj, te arreglas y preparas para irte a la escuela, pides una cantidad de dinero a tus papás, suficiente para el transporte y tu almuerzo o comida. En la cafetería escolar, comparas precios y ves que es lo que alcanzas a comprar con tu dinero, eliges y ordenas ciertas cantidades de pan, jugo, leche, frutas, verduras, comida o antojitos. Te apuras para no excederte del tiempo del recreo y verificas la hora de inicio y terminación de las asignaturas en tu horario de clases, dedicas dos horas diarias a tus trabajos y tareas, dos horas diarias de deporte o paseo y solo ves un poco de televisión para jóvenes antes de acostarte a cierta hora determinada. Como ves, siempre utilizamos matemáticas, de ahí su

importancia en conocerlas, aprenderlas y dominarlas.

A continuación te invito a que sigas leyendo y descubras la importancia de las matemáticas en las siguientes lecturas:

EL HOMBRE Y EL NÚMERO

"Y dijo Dios: Hagamos al ser humano a nuestra imagen, conforme a nuestra semejanza; y señoree en los peces de la mar, y en las aves de los cielos, y en las bestias, y en toda la tierra, y en todo animal que anda arrastrándose sobre la tierra"

Génesis 1:26

"Y dijo Jehová Dios: He aquí que el ser humano es como uno de nosotros sabiendo el bien y el mal. Ahora pues, porque no alargue su mano, y tome también del árbol de la vida, y coma, y viva para siempre; Sacólo Jehová del huerto de Edén, para que labrase la tierra de que fue tomado"

Génesis 3:22

El ser humano posee, incluso en los niveles más elementales de su desarrollo, un tipo de *facultad natural* que le permite tener una idea de número o cantidad. Por ejemplo, si vamos a la tienda a comprar 2 Kg. de azúcar, al ver el tamaño de la bolsa vemos si nos están dando la cantidad correcta, después al tomarla con nuestras manos sentimos el peso y nos damos cuenta si nos entregaron la cantidad pedida.

En el ser humano existe una idea de número y otra idea de forma al mismo tiempo, es decir, no solo tiene la capacidad de contar, sino también la capacidad de diferenciar las diversas formas geométricas de los cuerpos que nos rodean. Por ejemplo, al ver un cubo, no solo vemos su forma sino **p o d e m o s c a l c u l a r** aproximadamente su volumen en litros, de acuerdo a su tamaño.

Si a nosotros nos ponen una serie de números enteros, simplemente con la vista y al instante sabemos que números son pares o impares, en cambio, una computadora necesita que se le enseñe la serie de pasos que debe seguir para identificar si un número es par o impar y jamás lo podrá hacer sin un programa.

Todo lo anterior nos lleva a concluir, que el ser humano nace con una orientación hacia los números y por lo tanto hacia las matemáticas. De hecho el mundo sin matemáticas no podría existir, todo es matemático y en todos lugares se realizan operaciones con ellas, principalmente de comprar y vender, de ahí que el aprendizaje de las matemáticas sea fundamental para nuestra vida.

Pitágoras, uno de los grandes matemáticos griegos, su lema principal fue *“Todo es Número”*. Su doctrina proclamaba que la

elevación del alma y su unión con Dios se conseguiría por medio de las matemáticas y que Dios había ordenado el universo gracias a los números. Esto nos muestra que desde la antigüedad ya se consideraban muy importantes, y por esto, los mayores sabios de la antigüedad fueron grandes matemáticos además de filósofos.

Si bien el hecho de contar se revela como una acción en gran parte reservada al ser humano, existen algunas especies animales que parecen poseer un sentido rudimentario del número similar al nuestro. Principalmente los pájaros, se ha comprobado pueden llegar a contar, en el sentido literal del término, dándose cuenta de las diferencias entre colecciones de distinto número de puntos.

Supongamos que en un nido se tienen 5 huevos, se puede quitar uno sin que la hembra lo note, pero si se quitan dos, abandonará en general el nido, como si pudiese, por algún procedimiento, distinguir cuatro de tres. Por ejemplo, un ruiseñor podía contar hasta tres. Todos los días le llevaban, de uno en uno, tres gusanos para la comida; tomaba uno e iba a comerlo a otro lado, después regresaba por el segundo y luego por el tercero. Pero después de haber comido el tercer gusano, ya no regresaba como si supiera que era el último.

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 66

Otro caso es el de la avispa solitaria que lleva a sus vástagos una provisión constante de orugas vivas que puede ser de cinco, doce o hasta veinticuatro. En otra variedad de avispa, la *Genus Eumenus*, en la que el macho es menor que la hembra, la madre sabe de antemano si el huevo producirá una larva hembra o una larva macho y proporciona a cada una el alimento que necesita: cinco orugas al macho y diez orugas a la hembra.



El ejemplo más revelador es el de una corneja que había fijado su nido en la torre de observación de un castillo. El castellano deseaba matarla, lo había intentado varias veces, pero siempre que se acercaba, dejaba su nido y se ponía fuera del alcance de su fusil. El castellano optó por una artimaña, una mañana se presentó en la torre junto con un amigo, los dos hombres entraron y poco

tiempo después salió solo el castellano. La corneja esperó pacientemente la salida del segundo hombre. En los días que siguieron, la experiencia se repitió con tres o cuatro personas. Siempre al acecho, la corneja volvía a la torre una vez que había salido el último hombre. Por último, se enviaron cinco hombres, como en ocasiones anteriores, salieron cuatro de la torre, uno después del otro, mientras el quinto se quedó en el interior de la torre. La corneja incapaz de distinguir cuatro de cinco, regresó a la torre sólo para ser muerta por el quinto hombre.

Estos hechos demuestran que ciertos animales pueden contar, y ponen de manifiesto un sentido del número parecido al nuestro. Además, experimentos hechos con animales nos hacen pensar, que éstos tienen a veces, actividades que reflejan aspectos netamente matemáticos, probablemente de naturaleza inconsciente.

Si los animales tienen esas aptitudes para las matemáticas, qué capacidades no tendremos todos los humanos para aprender y dominar las matemáticas, con un cerebro muy superior; para los que somos cristianos, hecho a imagen y semejanza de Dios. Por esta razón, en ningún momento se justifica la frase “Yo no sirvo para las Matemáticas”, ya que estamos hechos con orientación hacia las ellas y con un cerebro privilegiado

sobre las demás especies, tan completo que aún los más grandes sabios sólo han logrado utilizar el 40 % de su capacidad.

En el mundo existen 6 mil trescientos millones de seres humanos. Pero jamás ha existido ni habrá uno como tú. Tú eres un ser raro, exclusivo, diferente y único en el mundo. Estas cualidades te dan un valor extraordinario. Por favor entiende, Einstein era un genio, pero lo hizo con estudio y trabajo, pero era un mortal igual que tú. El mismo Dios que creó a Einstein te creó a ti, y tú eres tan valioso a los ojos de Dios como lo es cualquier otro. Einstein utilizó el talento que Dios le dio. Cuantos Einsteins más habrán nacido, pero que se perdieron porque jamás pusieron esfuerzo y empeño en destacar ni en usar sus talentos. Tú mismo eres lo más valioso que tienes, así que tómate a ti mismo y utiliza tus talentos.

Si todavía dudas de tu valor y gran capacidad, debes saber que para los que somos cristianos, la Santa Biblia nos dice que el ser humano fue creado a imagen y semejanza de Dios, apenas un grado menor que los ángeles. Jesucristo dice “Lo que yo he hecho, vosotros también lo podéis hacer, e incluso hacer obras más grandiosas que éstas”. Eres alguien debido a **que Dios no pierde su tiempo en hacer un nadie. Dios no crea fracasos**, es el

ser humano que con su voluntad decide o ser exitoso o fracasado. Nos dio voluntad para que nosotros elijamos el camino que queremos seguir. El mundo está a nuestros pies, pero debemos tomar la decisión y hacer lo necesario para conquistarlo.

Todos los seres humanos tienen las mismas capacidades, habilidades, oportunidades y adversidades. Nadie nace siendo un doctor, un ingeniero, un médico, un abogado, un escritor, un artista, un arquitecto, etc. Al nacer un bebé, siempre dicen fue niño o niña, pero jamás dicen es un doctor, un ingeniero, un artista, etc. Sin embargo, al morir si pueden decir fue un doctor, un ingeniero, un arquitecto, un abogado, un exitoso, un fracasado, etc. Ya que no “nacieron” pero si se “hicieron”, es obvio que en algún punto entre el nacimiento y la muerte, **por elección y educación**, se constituyen en lo que desean ser. En realidad jamás se ha visto que una mujer hubiera dado a luz a un éxito o fracaso. Siempre dicen fue niño o niña. Las personas de éxito dicen “soy un ser humano que me he hecho a mí mismo”. En cambio, los fracasados jamás dicen “soy un fracaso hecho por mí mismo” sino que culpan a todos los demás de su fracaso: a sus padres, a sus amigos, a sus maestros, a la sociedad, etc. **No te engañes el éxito o el fracaso dependen solo de ti.** *Debes saber que tu controlas*

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 68

tu futuro; el cual dependerá de lo que hagas o dejes de hacer hoy en el presente.

Algunos estudiantes se menosprecian y por eso fracasan, siempre dicen “si yo tuviera su habilidad, su memoria, su capacidad de él o de ella” también lograría triunfar. La situación es que tus *habilidades son mejores y no las utilizas* porque no te has decidido a hacerlo. Si tuvieras las habilidades y capacidades de otro jamás las utilizarías mientras tú no quieras y te decidas a hacerlo. Esta es la cuestión: **QUERER**. Hay personas que esperan que algún día les llegue la suerte y la fortuna. Esperan la gran oportunidad que les dará fama y riqueza instantáneamente, También los puedes ver en las playas, pensando que su barco de la fortuna está en camino, y, sin embargo, saben en lo más íntimo de su ser, que jamás ha salido del puerto. Todas estas personas son prisioneras de la esperanza. Jamás hacen algo por superarse. Siempre sueñan que les llegue la suerte y la fortuna, sin hacer nada por merecerlas. Desean tener las habilidades, capacidades o el talento de otras personas triunfadoras. **La verdad es que ya tienes la capacidad necesaria para lograr el éxito.** La historia de la vida dice que si utilizas lo que ya tienes, recibirás aún más. Pero también dice que sino usas los talentos que tienes, te serán quitados.

“El ser humano fue diseñado para la realización, formado para alcanzar el éxito y dotado con las semillas de la grandeza”. Puedes descubrir que no es necesario culpar a otras gentes por algún problema. Al final de las mangas de tu camisa encontrarás las manos capaces de ayudarte. Tu situación y tu futuro están en manos capaces: **¡las tuyas!**

En lo alto de una hermosa colina, en Venecia, Italia, habitaba un anciano genio. La leyenda dice que podía responder a cualquier pregunta que se le hiciese. Dos niños pensaron que podían engañarlo; de manera que atraparon un pequeño pájaro y se dirigieron a la residencia del genio. Reteniendo el pajarillo en sus manos, uno de los muchachos preguntó al anciano si el ave estaba muerta o viva. Sin dudar, el anciano dijo: “*Hijo, si te digo que el ave vive, cerrarás tus manos aplastándola hasta matarla. Si te digo que tu ave está muerta, abrirás tus manos para dejarla escapar volando. Como ves, hijo, en tus manos tienes el poder de la vida y la muerte*”. En tus manos tienes el potencial del éxito o las semillas del fracaso, Tus manos son capaces pero deben ser utilizadas para las cosas correctas y para cosechar los buenos frutos que pueden alcanzar.

Hace varios años, un vendedor de

globos en la ciudad de Nueva York, cuando las ventas bajaban soltaba un globo, que al flotar en el aire, atraía por unos minutos a una multitud de compradores. Alternaba los colores, primero soltaba un globo blanco, luego uno rojo y después uno amarillo. Al cabo de un rato, un niño negro le jaló la manga del saco, miro al vendedor a los ojos y le planteó una pregunta profunda: “señor, si soltara un globo negro ¿subiría?” El vendedor de globos miró al pequeño y con compasión, sabiduría y comprensión le dijo: **“Hijo, lo que los hace subir es lo que está dentro de ellos”**. También tengo razón cuando te digo: **“Lo que está dentro de ti es lo que te hará subir”**. No es la apariencia o belleza física, no es el color de tu piel, es tu mentalidad lo que te sacará adelante en cualquier situación.

Para facilitar que seamos grandes seres humanos, debemos prepararnos desde ahora, tal como lo expresan las frases siguientes: “No se porqué, pero entre más estudio y trabajo, más suerte tengo” y “Debes prepararte para que cuando la inspiración llegue, te encuentre trabajando”

UNIDAD VIII

¿POR QUÉ NO APREND O MATEMÁTICAS?

“Somos lo que pensamos que somos. Ya sea que pienses que triunfarás o fracasarás, estás en lo cierto”.

Henry Ford

Una de las causas principales que no dejan a un estudiante aprender a dominar las matemáticas, **es el miedo y temor que les tiene**, ya que con esto, *opone inconscientemente una barrera mental que le impide aprenderlas*, debido a que la mayor parte del tiempo se la pasa pensando *¡No puedo!, ¡No sirvo para las matemáticas!, ¡No me gustan!, ¡Me dan miedo!, ¡Las odio!, Etc.* Mientras piense de esta manera, jamás tendrá éxito ni en matemáticas ni en otros estudios o actividades, solamente si cambia esta mentalidad negativa, por una mentalidad alegre y optimista, teniendo confianza en sí mismo, valorándose honestamente y reconociendo sus habilidades y destrezas.

Está comprobado que todos tenemos la capacidad suficiente para dominar las matemáticas y cualquier otra actividad que nos propongamos, siempre y cuando lo hagamos con **decisión y esfuerzo**, recuerda que en la vida nada es

gratis y que todo trabajo tiene al final su gran recompensa. *Recuerda que el único lugar donde éxito aparece antes de trabajo es en el Diccionario.*

Querer es poder, tal como quedo comprobado con una de las frases más utilizadas por la Porra de la Selección Mexicana de Fútbol, en el Mundial Francia 1998, la cual fue: ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!. Dicha frase logró que el equipo mexicano tuviera tan notables resultados, tales como el logro de su clasificación a la segunda ronda y el mayor número de goles anotados en un Campeonato Mundial.

Aunque lo más increíble fue la forma como la selección se sobrepuso a marcadores adversos en sus tres partidos y que todos sus goles los anotó en el segundo tiempo sin recibir ningún otro gol. Durante el primer tiempo nuestro equipo se notó sin atención y concentración, nervioso y quizás con miedo, por lo tanto cometió errores, lo cual hizo que el equipo rival aprovechara y le metiera goles fáciles, que en otras situaciones no le hubieran anotado al equipo mexicano. *Nota como el miedo provoca errores y perjudica enormemente. El tener miedo o preocupación no soluciona el problema, solamente lo agrava.*

El grito de ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!, Transformó al equipo, al grado tal que ya no recibió ningún gol en el segundo tiempo y en éste tiempo metió todos sus goles. Todo esto lo hizo ante rivales considerados difíciles, tales como Corea del Sur, Bélgica y Holanda. Sobre todo este último, considerado como favorito para ganar el Campeonato Mundial de Fútbol.

Mientras la selección mexicana consideró difíciles a sus rivales, no pudo con ellos, fue el grito de ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede! Lo que logró cambiar su mentalidad y estado de ánimo, de manera tal que mostró carácter, decisión, ganas, deseos y optimismo. Con estas características los resultados fueron muy favorables, logrando que el equipo mexicano fuera respetado por los equipos considerados favoritos para ganar la Copa Mundial.



Fue tan notable el éxito de la porra mexicana, que algunas porras de otros países copiaron el grito de ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!, ¡Sí se puede!. ¿Por qué funciona ésta porra? Porque programamos a nuestro cerebro para que si podemos hacer las cosas. Aunque te parezca increíble, antes de emprender algo que consideres difícil, escribe y repite 3 veces esta porra con voz fuerte y verás que todo será más fácil y si lo podrás hacer.

Al convencerse los mexicanos, de que todos tenemos la suficiente capacidad física y mental, crearon una mentalidad ganadora, la cual mostraron en los octavos de final cuando enfrentaron a Alemania. Al minuto 3 del segundo tiempo el “Matador” *Luis Hernández* anotó el gol para México, los alemanes se

preocuparon enormemente y **mientras estaban nerviosos no le hicieron daño a nuestro equipo**. Parecía que nuestra selección tenía el triunfo en sus manos. Desgraciadamente, violó 2 reglas no escritas del fútbol:

1. Para controlar al rival y al marcador, debes controlar el balón, retenerlo, tocarlo, no prestárselo al rival y no cometer errores.
2. Dentro del área, jamás debes de tratar de controlar el balón, siempre debes despejarlo.

A pesar de que México se veía muy superior, **no respetó estas reglas y esto trajo graves consecuencias**. En el minuto 25, el jugador mexicano *Raúl Rodrigo Lara*, trató de controlar el balón dentro del área chica y no pudo despejar, dejándole en buena posición el balón al delantero alemán *Jurgen Klinsmann*, quien **muy atento y concentrado**, fue rápido y contundente para rematar y conseguir el gol del empate, aprovechando el error del mexicano.

Posteriormente Alemania consiguió su segundo gol al minuto 41, en un descuido defensivo de México, mediante su goleador *Oliver Bierhoff* y en un certero remate de cabeza, que dejó sin oportunidad al gran portero Guerrerense *Jorge Campos*.

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 72

Con este gol Alemania venció a México y lo eliminó de la Copa Mundial Francia 98. Podemos decir que Alemania no nos ganó, sino que México perdió debido a los dos errores graves cometidos.

En las **matemáticas** al igual que en el fútbol y otras actividades, **siempre debemos respetar estrictamente las leyes y reglas, debemos estar atentos y concentrados, se debe practicar muchísimo, ser certero y preciso.** Si hacemos lo anterior, seguramente tendremos éxito, sino probablemente quedaremos derrotados y frustrados.

A pesar de la derrota, todo México reconoció el esfuerzo de sus jugadores y nos hicieron sentir muy orgullosos, sin embargo, nos dejó la sensación de que pudimos haber ganado, ya que el equipo demostró mejor condición física y un mejor toque de balón, mayor habilidad y jamás tuvo miedo del equipo alemán.

Solo nos quedó una pregunta en la mente ¿Porque México no le ganó a Alemania? Respuestas pueden haber muchas, pero algunas podrían ser *porque no respeto las 2 leyes del fútbol, por que les faltó atención y concentración, porque no fueron certeros*, ya que al minuto 18 del segundo tiempo, el “Matador” falló un gol, estando solo frente al portero, tirándole el balón suave y a las manos.

Pero lo más importante fue la satisfacción y orgullo que nos dio la selección nacional a todos los mexicanos, ya que le mostraron al mundo, que el mexicano es un gran deportista, que está muy bien preparado, tiene carácter, tiene deseos, es decidido y da todo en el terreno de juego. *Todas estas características son muy importantes no sólo en el deporte, sino también en nuestros estudios.*

Los anteriores hechos futbolísticos se aplican de forma similar al estudio de las matemáticas. *Si sentimos miedo, temor, odio y aversión hacia ellas y pensamos que no podemos, seguramente jamás tendremos éxito en matemáticas* y por lo tanto en nuestros estudios, ya que las matemáticas son tan importantes, que las demás ramas de la ciencia se basan en ellas, en un grado tal que casi no existe ninguna Carrera Profesional donde no haya matemáticas.

En la Secundaria y Bachillerato, jamás nos podremos escapar de al menos 4 cursos semestrales de matemáticas, **así que sino podemos evitarlas, no nos queda otra que afrontarlas y vencerlas.** Pero las únicas armas para derrotarlas son: **la atención, concentración, deseos, ganas, optimismo, alegría y practicando muchísimo.**



Un amigo mío me comentó que el gobierno debería prohibir que en México se utilizara la frase “no puedo”, ya que se ha comprobado que el mexicano puede y de gran manera, lo que tiene que vencer primero es el miedo para después vencer al enemigo. El mexicano es la persona con mayor energía, habilidad y creatividad en el mundo, es increíble que no seamos una de las mayores potencias mundiales y que esto sea por no habernos decidido a hacerlo y no hayamos hecho el esfuerzo necesario para lograrlo –por perezosos y apáticos, en pocas palabras. El trabajo y el esfuerzo son lo único que cambiará el destino de nuestra nación.

En las Escuelas básicas y de nivel medio superior debería de enseñarse una asignatura de motivación y creatividad.

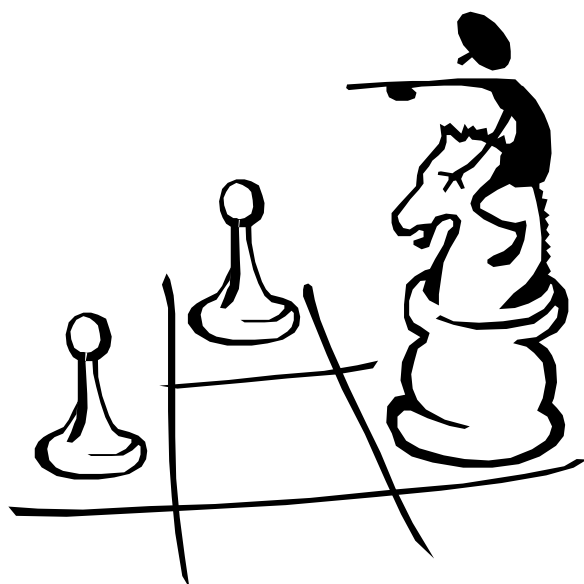
Debemos estar orgullosos de nuestros antepasados, los cuales antes de la llegada de los españoles, tenían grandes culturas, tales como: la maya, azteca, olmeca, tolteca, tarasca, teotihuacana, chichimeca, etc. Inventaron el cero, el calendario solar, el juego de pelota, construyeron grandes pirámides que eran observatorios astronómicos y templos a la vez, etc. Estaban muy avanzados en matemáticas, astronomía, arquitectura, medicina, botánica, arte y educación.

LAS MATEMÁTICAS Y EL AJEDREZ



¿Cómo logran los alemanes y los rusos que sus alumnos tengan gran atención y concentración? La respuesta es jugando ajedrez.

El ajedrez es un juego muy antiguo, que se cree fue inventado en la India. A pesar de su antigüedad, nunca ha sido superado en ingenio por ningún otro.



Para aprender matemáticas ayuda mucho jugar ajedrez, ya sea con otra persona o contra una computadora. Esto debido a que el ajedrez *además de ejercitar nuestro cerebro, ayuda a organizar nuestro pensamiento, a tener paciencia, a tener sentido analítico, nos forma disciplina, proporciona tenacidad, aumenta nuestra observación, concentración y atención. Todas estas cualidades son indispensables para dominar las matemáticas.*

El ajedrez se considera como una mezcla de juego, arte, deporte y ciencia. Este juego además de diversión proporciona fama y admiración a quien lo domina, lo mismo ocurre con el que sabe matemáticas, con la ventaja adicional que ésta le sirve para sus estudios y para toda su vida.

Al preguntarles su opinión porque se apasionaban por este juego, a varios jugadores de ajedrez de diversas áreas contestaron lo siguiente:

Comerciante: Porque limita el elemento suerte y acentúa la importancia de la planificación.

Músico: Porque para él era como su propia vida: enseñaba a coordinar la razón con el instinto.

Matemático: Porque es un juego muy estético: encontraba en una serie de movimientos la misma belleza que en un teorema.



Filósofo: Porque en él triunfan la lógica y la razón, no deja nada a la suerte; aunque le gustaba por su nivel de incertidumbre y su encanto de lo inesperado.

Maestro: Posee muchos valores educativos. Contribuye a la comunicación humana y sirve para ganar amigos. Logra que el hombre se mejore como ser

humano.

Los grandes jugadores de ajedrez, desarrollan altos niveles de **abstracción y concentración**, muy necesarios al estudiar matemáticas. Pero sólo la práctica permite desarrollar estas cualidades, por esto puede decirse que *“sin practica no hay aprendizaje”*. Así que necesitas resolver muchos ejercicios antes de lograr el dominio de las matemáticas. Es decir, **no son una ciencia que se aprenda viendo, sino que se aprende haciendo**.

UNIDAD IX

LA SALUD, LOS BUENOS HÁBITOS Y LAS MATEMÁTICAS

Evita los malos hábitos, que impiden que logres tus metas. Los malos hábitos son aquellos que únicamente quitan tiempo, llenan tu cerebro de ideas inservibles y no te dejan ningún provecho. Algunos ejemplos son: **ver en exceso televisión, comer demasiado, asistir continuamente a fiestas, desvelarse, los vicios, etc.**

Una buena salud es muy importante para lograr aprender cualquier materia, por esta razón, de ninguna manera debes consumir drogas, alcohol,

cigarrillos o cualquier tipo de estimulantes. Quien los prueba, ya no los puede dejar y queda atrapado como esclavo de ellos y jamás puede liberarse. **Es falso que los puedas probar y después dejar**. Al principio las drogas te las regalan, porque saben que quedarás atrapado en ese vicio, después tienes que pagarlas a precios altos.

La mayoría de los jóvenes que tienen vicios, después se convierten en delincuentes, para poder conseguir dinero para mantener su vicio. Pierden su autoestima y muchos buscan el suicidio como salida, ya que sienten que han echado a perder su vida.

Debemos de estar conscientes que las drogas y el alcohol, son un peligro latente que nos acecha por todos lados. Actualmente, en cualquier bar, discoteca o en la calle, te venden la droga como cualquier mercancía y por lo tanto todos estamos expuestos a ser destruidos por ellas. Afecta a pobres y ricos, jóvenes y adultos por igual.

Debido a la adulteración de las bebidas alcohólicas -50 % de lo que se consume--, existe un peligro mucho mayor al consumirlas, ya que las bebidas adulteradas son mucho más dañinas que las bebidas normales y *causan mayores*

daños a nuestro cerebro e incluso hasta la muerte. Es tan grave el problema, que el gobierno ha ordenado que a partir de septiembre de 1999, todas las botellas de bebidas alcohólicas de graduación mayor a 14°, deben llevar un holograma que impida su adulteración; aunque lo ideal es no consumirlas. Pero esto sólo lo evita la gente culta y educada.

La gran cantante *Sasha Sokol*, participa en una campaña antidrogas, con sus famosas frases, *¿No me digas que no la haces sin drogas? ¿Tu, que quieres?* Ha reconocido públicamente su anterior adicción a las drogas y los perjuicios que estas le han provocado. Declaró que se sometió a dos tratamientos carísimos para quitarse el vicio, ya que había recaído después del primero, debido a que no es nada fácil salir de los vicios una vez que se ha caído en ellos. *Sasha* ha sido valiente en reconocer su problema y no quiere que más jóvenes caigan en las garras del vicio, por esta razón, participa en este tipo de campañas.

Los vicios dañan enormemente nuestro cuerpo, principalmente destruyen las neuronas del cerebro, que son las encargadas de los procesos cerebrales, tales como el pensamiento, visión, audición, olfato, memoria, inteligencia, etc. El cerebro es el centro de control del

movimiento, del sueño, del hambre, de la sed y de casi todas las actividades vitales necesarias para la supervivencia. Todas las emociones humanas como el amor, el odio, el miedo, la ira, la alegría y la tristeza están controladas por el cerebro

A pesar de todo el daño recibido por el cerebro, ya que las neuronas no se regeneran, es un órgano tan maravilloso que aun así tiene la capacidad de lograr un buen aprendizaje. En ocasiones, las personas afectadas ya no aprenden, pero esto es debido a los daños al sistema nervioso, a la baja autoestima o a la pérdida de la salud en general.

Una buena salud se logra mediante una buena alimentación, en la cual se disminuya el consumo de grasas y carne de todo tipo, principalmente la carne de cerdo. Debe quitarse o disminuir el consumo de refrescos, especialmente de cola, pastelillos, café, sal y azúcar refinada –blanca-. Todo esto último, aunque te parezca increíble, en lugar de darte fuerzas o energía, te quita la poca que pudieras tener. Por esta razón, muchas veces no tienes ganas de hacer algunas actividades, no porque seas perezoso.

Deben preferirse los productos naturales a los productos enlatados o envasados, debido a los conservadores, colorantes y saborizantes artificiales. Además, cuando consumimos un producto natural, como una naranja por ejemplo, estamos ayudando a que la agricultura y el campo se desarrolle, en cambio, si nos tomamos un refresco de cola, favorecemos a la industria refresquera, que en poco beneficia al campo y si perjudica nuestro cuerpo.

Debe incrementarse el consumo de frutas, verduras, legumbres y cereales, principalmente la soya. Debe evitarse comer en exceso, principalmente las grasas saturadas, en cambio, debe incrementarse el consumo de fibra natural.



El ejercicio es el complemento ideal para tener una vida sana y saludable. Realiza el ejercicio al aire libre, donde el ambiente no esté tan contaminado.

Preferiblemente practica deportes en equipo y mejor si es un juego donde participe toda tu familia.

Disminuye el tiempo que pasas frente al televisor e incrementa el tiempo de lectura. Si en caso extremo ves televisión, escoge programas culturales, educativos, deportivos o informativos. **Vuélvete observador.** Cuando veas tu programa favorito, trata de apreciar la actuación, el guión, la fotografía, la música y los efectos especiales. No nada más te sientes frente a la TV, sin sacarle ningún provecho. Trata de imitar a los críticos de la televisión. Lo mismo has cuando veas una película. Por ejemplo, en la película “Soldados de Dios” (The Prophecy), donde *Cristopher Walken* interpreta a un ángel y al buscar el espíritu de otro ángel, llega a una escuela primaria, donde sabe que una niña tiene ese espíritu. Después de buscarla, juega con los niños y al final les aconseja *“Aprendan matemáticas y ciencias, ya que son las llaves del éxito en la vida”*. Te recomiendo mucho que veas la película “Con Ganas de Triunfar” de Edward James Olmos, un gran actor de origen mexicano que interpreta a un maestro de matemáticas, en una escena expresa: *“las matemáticas no necesitan que las hagan fáciles, por que ya son fáciles”*.

LA MÚSICA Y EL APRENDIZAJE

La música ayuda al aprendizaje en general, por esto, muchos cuando estudian lo hacen escuchando música. Nuestro cerebro está capacitado para realizar cuatro o más actividades al mismo tiempo, a diferencia de las computadoras que ejecutan solamente una – excepto cuando tienen dos o más procesadores. Cuando estudies, te recomiendo masticar un chicle sin azúcar, pero sin hacer bombas ni ruido, ya que al masticar, agregamos una actividad más a la de respirar, ver, oír y escribir, por lo cual nos mantenemos más atentos y concentrados en los estudios y menos posibilidades tenemos de distraernos; lo anterior, ha aparecido publicado en revistas de carácter científico y si funciona.

Podemos escuchar buena música clásica, con bajo volumen, mientras estudiamos o resolvemos problemas. Sin embargo, debemos evitar la música ruidosa y estridente, principalmente del género rock, ya que en lugar de música genera ruido, el cual produce efectos psicológicos nocivos, vuelve a las personas estúpidas, insociables,

predispone a la ira y genera un comportamiento agresivo. Además, de los mensajes subliminales diabólicos que contiene.



No uses audífonos, ya que provocan sordera al igual que el alto volumen en las Discotecas. Prefiere la música instrumental, principalmente la clásica, ya que por ejemplo, la música de Mozart ayuda a revitalizar el cerebro y lo prepara para el aprendizaje. También es recomendable la música de Vivaldi, Bach, Beethoven, Brahms, Tchaikovsky, Chopin y Haydn. Por ejemplo, el *Largo del "Invierno" de las cuatro estaciones* de Vivaldi es adecuada para *superaprendizaje* y todos los vales de Chopin son adecuados

para *aprendizaje activo*.

La música debe ser agradable al oído y al corazón. Debe motivarnos a seguir adelante y a lograr nuestras metas. La *buena música* es un bálsamo para el corazón, aunque estemos decaídos.

UNIDAD X CONSTRUYE TU AUTOCONFIANZA

La autoconfianza, es decir, *el confiar en nosotros mismos, es un requisito importante para emprender cualquier actividad*, con mayor razón, si se trata del aprendizaje.

Una gran **autoestima** (el querernos y valorarnos a nosotros mismos) **es fundamental para tener éxito en la vida**. Si tenemos una imagen pobre de nosotros mismos, nunca dejaremos de ser mediocres; ya que para tener éxito tenemos que pensar que somos exitosos, que ya tenemos el éxito; Pensando así obligaremos a nuestro cerebro (*inconscientemente*) para que haga todo lo posible para obtener el éxito. **El pensar positiva y optimistamente será la catapulta que nos lanzará hacia el éxito**. Pero recuerda, el éxito no es un destino al cual debemos de llegar, sino *un camino, el cual debemos caminar día con día*

desde hoy. Es una forma de ser y de pensar. Si no piensas y actúas exitosamente jamás lograrás el éxito verdadero.

Tienes capacidades, habilidades y talentos; utilízalos no te robes a ti mismo. Si no los usas nunca obtendrás sus frutos, mucho menos los podrás cosechar. A continuación te expongo casos de gentes que se robaron a sí mismos al no utilizar sus talentos adecuadamente.

EMMANUEL NINGER

En 1887, en una pequeña tienda de víveres, un caballero de aspecto distinguido como de 60 años, estaba comprando nabos y entregó a la cajera un billete de 20 dólares, esperando su cambio. La cajera aceptó el dinero y lo puso en el cajón de la registradora, cuando notó que la tinta se estaba despintando y le manchaba los dedos, que todavía estaban mojados por los nabos. Asombrada, se detuvo para pensar lo que debía hacer. Después de un instante de luchar con sus dudas, tomó una decisión. El caballero era *Emmanuel Ninger*, un amigo, vecino y cliente por muchos años. Ciertamente, no le daría un billete sino fuera genuino, por lo que ella le entregó el cambio y salió de la tienda.

Más tarde, reconsideró su

decisión debido a que 20 dólares en 1887 era mucho dinero, por lo que mandó llamar a la policía. De los dos policías que llegaron a investigar, uno de los policías pensaba que el billete era genuino, en tanto que al otro le intrigaba la tinta que se borraba. Finalmente, la curiosidad y la responsabilidad les hicieron obtener una orden de cateo para entrar en el hogar del señor *Ninger*. En el ático encontraron los instrumentos e instalaciones necesarias para reproducir billetes de 20 dólares. Incluso, encontraron un billete de 20 dólares en proceso de impresión. También encontraron 3 retratos de *Emmanuel Ninger*. *Ninger* era un buen artista. Era tan bueno que había pintado a mano esos billetes de 20 dólares. Meticulosamente, de trazo en trazo, aplicaba el toque maestro con tanta habilidad que pudo engañar a todas las personas durante 20 años, hasta que lo descubrió un capricho del destino manifestado por las manos mojadas de una vendedora de víveres.

Después de su arresto, los retratos que había hecho *Ninger* se vendieron en una subasta publica por 16 000 dólares – más de 5 000 dólares por cada uno --. La ironía de la historia es que *Emmanuel Ninger* gastaba el mismo tiempo para pintar un billete de 20 dólares que para un

retrato de 5 000 dólares. Efectivamente, este hombre brillante y talentoso era un ladrón en toda la extensión de la palabra. Increíblemente, a la persona que más robó fue al mismo *Emmanuel Ninger*. No sólo pudo haber sido un hombre rico si hubiera comerciado legítimamente con su habilidad, sino que en el proceso pudo haber proporcionado mucha alegría y beneficios a su prójimo. Fue otro de los ladrones que se roban a sí mismos cuando tratan de robar a los demás.

ARTHUR BARRY

Un segundo ladrón del que me gustaría platicarte, es un hombre llamado *Arthur Barry*. Era un ladrón poco común: era un ladrón de joyas que operó en los fabulosos años “veintes”. *Barry* adquirió fama internacional como el ladrón de joyas más destacado de todos los tiempos. No sólo era un excelente ladrón de joyas sino también un conocedor del arte. En efecto, se había convertido en un *snob* y no robaba a cualquiera. Sus “prospectos” no sólo deberían tener dinero y joyas para que él los visitara, sino que sus nombres tendrían que figurar en los estratos más altos de la sociedad. Llegó a convertirse en un símbolo de *status* el haber recibido la visita y ser robado por este “ladrón caballero”.

Una noche, *Barry* fue atrapado durante un robo y recibió 3 balazos. Con balas en su cuerpo, astillas de vidrio en los ojos y un dolor demasiado intenso, hizo una declaración no demasiado inesperada: “No lo volveré a hacer más”. Escapó milagrosamente y los 3 años siguientes permaneció fuera de la cárcel. Después, una mujer celosa lo delató, y *Barry* purgó en prisión una sentencia de 18 años. Cuando salió cumplió su palabra. No volvió a la vida como un ladrón de joyas, sino que se estableció en un pequeño poblado de Nueva Inglaterra y llevó una vida ejemplar. Los ciudadanos locales le confirieron el honor de hacerlo comandante de una organización local de veteranos.

Sin embargo, se llegó a saber que *Arthur Barry*, el famoso ladrón de joyas, se encontraba ahí. De todas partes del país llegaron reporteros al pequeño poblado para entrevistarlo. Le hicieron varias preguntas y finalmente un reportero joven llegó al meollo de la cuestión al formular la pregunta más penetrante de todas: “Señor *Barry*, robó a muchas personas ricas durante sus años de ladrón, pero tengo curiosidad por saber si ¿recuerda aquel a quien robó más?” Sin dudar un sólo momento, *Barry* respondió: “Es fácil. El hombre a quien más le robé fue *Arthur Barry*. Pude haber sido un

empresario de éxito, un Barón en *Wall Street* y un miembro contribuyente a la sociedad; sin embargo, escogí la vida de un ladrón y desperdicié dos tercios de mi vida de adulto tras los barrotes de una prisión”. Efectivamente, *Arthur Barry* fue otra persona que se robó a sí mismo.

Tú puedes ser tu propio ladrón. **Porque toda persona que no cree en sí misma y no utiliza al máximo sus habilidades, literalmente se está robando y a toda la gente que le rodea,** y debido a su menor productividad, también roba a la sociedad. Ya que nadie se robaría a sí mismo, los que se roban lo hacen sin saberlo. Sin embargo, el robo no deja de existir por el hecho de desconocerlo; es igual de grave como cuando se hace conscientemente.

Es el momento necesario para dejar de robarnos a nosotros mismos y de empezar a utilizar a nuestro favor todos los recursos de que disponemos. Si ni siquiera lo intentamos, nunca podremos decir que no somos capaces de hacerlo, ya que no lo hemos comprobado. Dejemos de vivir en el error y pasémonos del lado del éxito.

VICTOR SERIBRIAKOFF

Cuando *Victor Seribriakoff* –

norteamericano de origen ruso--, llegó a los quince años de edad, se inscribió a la escuela para estudiar el bachillerato, pero debido a que perjudicaba la clase, ya que hacia mucho alboroto y relajo, sus profesores se pusieron de acuerdo para decirle que jamás podría terminar sus estudios debido a que era un tonto, por lo que sería conveniente que abandonara la escuela para aprender un oficio. Víctor siguió el consejo y durante los 17 años siguientes anduvo errante efectuando diversos trabajos. Se le había dicho que era un “tonto” y durante 17 años actuó como tal. Al cumplir los 32 años, ocurrió una sorprendente transformación. Cansado de los pesados trabajos, decidió solicitar empleo en una oficina, el examen psicométrico reveló que Víctor era un genio, con un coeficiente de inteligencia igual a 161. ¡Adivina! ¡Correcto! Empezó a actuar como un genio. A partir de entonces ha escrito libros, solicitado y obtenido una diversidad de patentes y se ha constituido en un profesionista exitoso. Quizá el evento más significativo del ex estudiante fuera resultar electo presidente de la Sociedad Mensa Internacional. Dicha sociedad solo tiene un requerimiento para admitir a socios: Que el coeficiente de inteligencia sea como mínimo de 132.

La historia de *Víctor Seribriakoff*

nos hace preguntarnos, cuantos genios habrán deambulado alrededor de nosotros actuando como tontos, debido a que alguien les dijo que no eran demasiado brillantes. Es evidente que Víctor no adquirió repentinamente una gran cantidad de conocimiento adicional, ya que durante 17 años no había estudiado nada. En cambio, **sí adquirió repentinamente una cantidad considerable de confianza adicional.** Su autoestima se había incrementado notablemente y ahora se veía como un genio, por lo tanto, a partir de entonces empezó a actuar como tal. El resultado fue que instantáneamente se hizo más efectivo y más productivo. Al verse en forma distinta, también empezó a actuar distinto. Comenzó a esperar y a obtener resultados distintos. **Todo esto por que empezó a valorarse, a quererse y a tener confianza en sí mismo.**

Para empezar el aprendizaje, primero debes creer en ti mismo. Ya que esto afecta todo lo que hagas. La habilidad para aprender, la capacidad de creer y cambiar, la selección de amigos y de una pareja, la obtención de un buen empleo, todo está definido por la confianza que tengamos en nosotros mismos.

Toda la sociedad sabe que la educación es un camino de

superación accesible casi a cualquier persona. Pero también reconoce que es una arma de dos filos, ya que puede llevarte al triunfo, pero si tienes una *baja autoestima*, también puede traumarte y volverte un fracasado de por vida. Es como un cuchillo que en manos de un cirujano te salva la vida, pero en manos de un asesino te la puede quitar.

Debemos reconocer que vivimos en un mundo negativo, razón por la cual, con mayor razón necesitamos una actitud positiva y optimista. Todo mundo ve sólo el lado negativo de las cosas, sobre todo en las noticias. El anunciador de la TV informa que hay un 20 % de probabilidades de lluvia y que el cielo estará parcialmente nublado. Porque no mejor dice que hay un 80 % de probabilidades de que no llueva y que el cielo estará principalmente despejado. El niño llega de la escuela y le dice al papá “Padre, creo que reprobé historia”, el papá lo regaña por esa materia reprobada. Porque no mejor ve que el muchacho aprobó todas las demás materias con buena calificación. En lugar de motivar al muchacho para que le guste esta materia, lo justifica diciendo “A mí tampoco me gustaba esa materia y también la reprobé. A mí sólo me gustaban las matemáticas”. El 95 % de las noticias en la televisión y en el periódico son negativas. Por esto,

debemos evitar verla y leerlo sino tenemos una fuerte autoestima.

La segunda razón por la que no nos queremos o valoramos honestamente, es porque mucha gente nos ha dicho que no tenemos habilidad ni capacidad; entre ellos pueden estar nuestros padres, nuestros profesores, nuestros amigos o familiares y otras personas mayores. Pero ellos no nos conocen, ni saben de nuestras verdaderas capacidades y habilidades, por eso no pueden juzgarnos y no es verdad lo que nos han dicho. Ciertamente cometemos errores como cualquier ser humano, pero hay una gran diferencia entre aquello que haces y lo que de verdad eres. Hay una gran diferencia entre una persona “mala” y una persona que hace alguna cosa mal. Si piensas que eres inferior, seguramente aceptarás quedarte abajo y que las demás personas te pisoteen. Pero fuiste hecho para estar en la cumbre, en la cima del éxito y si te quedas abajo serás un perdedor, como todos los que no creen merecer el triunfo.

Jamás debemos compararnos con otras personas, ya que cada cabeza es un mundo; menos debemos compararnos con un triunfador, ya que él tiene la gran ventaja de su **mentalidad** y nosotros apenas vamos a iniciar

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 84

el camino del éxito. Hay gente que ya tiene más experiencia que nosotros y por eso son mejores. Pero la experiencia nada tiene que ver con la capacidad. Por ejemplo, hay 900 millones de chinos que hacen lo que tú no puedes hacer: hablar chino. Pero eso no los hace mejores que nosotros. Lo hablan porque son chinos y es su lengua, es su experiencia. Otro ejemplo, cuando surgió el cubo mágico inventado por el húngaro Rubik, en 1981 vi en la televisión que el campeón mundial Minh Thai armaba las 6 caras en 26.04 segundos. En virtud de que el cubo tiene su fundamento en las matemáticas, también me propuse resolverlo y empecé a dedicarle cierto tiempo a este cubo, pero sin descuidar mi trabajo y mis obligaciones. Solo en mis ratos libres lo analizaba y practicaba, al final obtuve un método para armar las 6 caras del cubo en 44 segundos.

La forma en que nos vemos influye enormemente en nuestra forma de ser. Por esta razón, debemos vernos como triunfadores si queremos obtener el éxito. Por ejemplo, *Eleanor Roosevelt* era una triste combinación de simpleza, susto y miedo. Mucho tiempo después y ya adulta tomó una decisión. Evaluó sus cualidades, comenzó a ver sus propios valores y se convirtió en una de las mujeres

más encantadoras y persuasivas de Estados Unidos. A pesar de que se desmayó en su primer discurso que dio.

Jimmy Durante y *Humphrey Bogart* no eran muy guapos; sin embargo, capitalizaron sus físicos y decidieron que tendrían un lugar en la vida si utilizaban lo que tenían. Ninguna de estas personas se vio físicamente poco atractiva. Vieron el talento o buenas cualidades que tenían. No compararon sus peores características con las mejores de otros, En vez de esto, tomaron sus mejores habilidades o talentos, utilizaron lo que tenían y obtuvieron lo que deseaban. Estoy convencido de que hay miles de hombres y mujeres mucho más guapos, que no han tenido éxito y que desearían tener un 10 % del éxito que ellos tuvieron. ¿Por qué no triunfan si son más guapos y quizá con mejores cualidades?

Como saber si soy un mediocre o perdedor. Muy fácil, sino te quieres a ti mismo o no te has valorado honestamente y no has puesto a trabajar tus talentos, lo más seguro es que seas un fracaso. Si dañas tu cuerpo con alcohol, tabaco o drogas, entonces eres un perdedor. Si tienes envidia o celos de los éxitos de las demás personas, también eres un mediocre. Si

eres inseguro y consideras que no puedes, entonces estás en el camino del fracaso. Los mediocres no soportan la crítica sana ni aprenden de sus errores. Todos cometemos errores, la diferencia es que el triunfador aprende de ellos y avanza. Los fracasados adoptan una actitud de “no puedo”, “me vale”, “no me importa”, “no me interesa”. Entonces se abandonan completamente y dejan de luchar totalmente. Expresan su fracaso buscando excusas y culpando a los demás de su derrota.

Si hicieras un inventario de lo que posees, siendo honestos, su valor sería de millones de pesos. Por ejemplo, una mujer de Gary, Indiana en los Estados Unidos, recibió un millón de dólares de un laboratorio farmacéutico, porque una medicina le hizo perder la vista. Otra mujer, en California ya no volverá a caminar debido a un accidente de aviación que le lastimó la columna vertebral; también recibió un millón de dólares de la compañía de aviación. Estarías dispuesto a cambiar tu vista, tu espalda o tus piernas por dos millones de dólares, equivalentes a 20 millones de pesos al tipo de cambio actual. Lo más importante es la salud y afortunadamente lo mejor de la vida es gratis.

¿Todavía dudas de tus capacidades y habilidades? Considera que tu cerebro funciona mejor y puede almacenar más información que 24 de las computadoras más recientes. Si el hombre quisiera hacer un cerebro humano, costaría millones de dólares y sería más alto que un rascacielos y requeriría más electricidad que una ciudad con 100 000 habitantes. Su construcción requeriría de los científicos más brillantes del mundo, y a pesar de su tamaño y su costo, este cerebro creado por el hombre no podría dar origen a un solo pensamiento. Algo que tu puedes hacer en un abrir y cerrar de ojos.

UNIDAD XI CARACTERÍSTICAS DE LOS QUE UTILIZAN MATEMÁTICAS

Para aprender matemáticas, es necesario aprender poco a poco los fundamentos matemáticos, **no se debe aprender mucho sino los detalles**. Después, la unión de todos esos firmes detalles, reglas o principios nos hará dominar y utilizar las matemáticas.

Ser matemáticamente confiable

significa darse cuenta de la importancia de las matemáticas y sentirse capaz de aprender a:

- ❖ Usar las matemáticas con facilidad.
- ❖ Resolver problemas y trabajar con otros que así lo hagan.
- ❖ Demostrar fuerte habilidad para razonar.
- ❖ Ver más de una manera de resolver un problema.
- ❖ Aplicar las ideas matemáticas a otras situaciones de la vida.
- ❖ Usar la tecnología.

Actualmente, los muchachos deben tener varias ideas asociadas con las matemáticas, incluyendo la solución de problemas, comunicarse matemáticamente y el razonamiento lógico,

Pero que significa:

- Ser un solucionador de problemas
- Comunicarse matemáticamente
- Demostrar capacidad de razonamiento

Un **solucionador de problemas** es alguien que pregunta, investiga y explora soluciones a los problemas; muestra la habilidad para atarse con un problema por días si es necesario, hasta encontrar una solución trabajable; usa diferentes estrategias para llegar a una

respuesta; Considera tantas respuestas como posibilidades y aplica las matemáticas a situaciones de la vida diaria y las utiliza exitosamente. Es alguien que jamás se desanima o se da por vencido.

Comunicarse matemáticamente significa usar palabras o símbolos matemáticos para explicar situaciones de la vida real; platicar respecto a como llegar a una solución; escuchar otras maneras de pensar y quizá cambiar su pensamiento; escribir acerca de las matemáticas y no sólo dar una respuesta. El matemático para comunicarse utiliza el lenguaje matemático, que en su mayor parte es el lenguaje algebraico.

Demostrar habilidad de razonamiento es para justificar y explicar nuestro pensamiento respecto a las matemáticas; pensar lógicamente y ser hábil para explicar similitudes y diferencias respecto a las cosas y tomar decisiones basados en éstas similitudes o diferencias; y pensar respecto a las relaciones entre las cosas y platicar de ellas. Tener varios juicios respecto a algo y al final emitir una conclusión.

¿CÓMO ME PREPARO PARA UN EXAMEN?

Una situación importante es demostrar nuestro aprendizaje y esto generalmente se realiza mediante un examen o prueba escrita. Cuando realmente hemos aprendido jamás reprobaremos al realizar nuestro examen.

A continuación te doy algunas sugerencias útiles para presentar un examen:

- Estudia 2 horas diarias. El aprendizaje es un hábito no una casualidad.
- De acuerdo con los temas del examen, elabora una serie de problemas y preguntas que crees te harán en el examen y contéstalas correctamente.
- Un poco antes del examen repasa todo los temas que contempla el examen,
- No te desveles un día antes del examen.
- Jamás te pongas nervioso en un examen, vale más conservar la calma. Los nervios sólo complican la situación. Los que se ponen nerviosos o quieren copiar demuestran que son flojos y no estudian. No te enojés.
- Ten todo tu material listo para el examen, tal como: lápiz, goma, sacapuntas, calculadora, juego geométrico, formulario, tabla periódica, etc.
- Llega puntual al examen. Si llegas

tarde estarás presionado por el tiempo y te puedes poner nervioso. Si llegas puntualmente, tendrás más tiempo para contestar el examen.

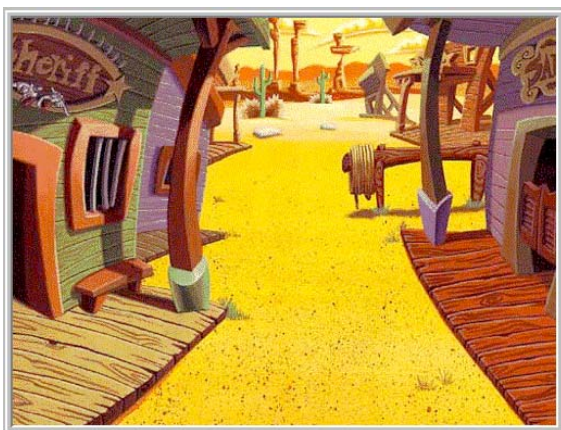
- Antes de empezar el examen primero dale un vistazo general y después contéstalo detalladamente.
 - Lee cuidadosamente las instrucciones.
 - Primero contesta donde estés seguro que las respuestas son correctas. Después, con calma contesta en forma analítica y lógica las demás preguntas. No adivines la respuesta, lee la pregunta hasta que entiendas lo que te piden.
 - Concéntrate en el examen, no pierdas tiempo tratando de copiar o dejándote copiar. Aprende por ti mismo y jamás copies ni dejes que te copien.
 - Verifica que hayas contestado todo el examen. No dejes una sola pregunta o problema sin contestar, ya que la mayoría de los profesores, en los problemas califican el procedimiento y no sólo el resultado.
 - Procura aprovechar todo el tiempo que dura el examen, no quieras ser de los primeros que entregan su examen, sino de los primeros en calificación.
- Para los que todavía dudan de sus extraordinarias aptitudes y capacidades, por último, permítanme transcribir las palabras del gran pensador, filósofo y matemático francés René Descartes, quien en el primer párrafo de su libro *El Discurso del Método*, habla de la inteligencia del ser humano, que él denomina el buen sentido y de

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 88

lo suficiente que todos poseemos de ésta cualidad, sus palabras son:

"El buen sentido es la mejor cosa repartida del mundo, pues cada cual piensa que posee tan buena provisión de él, que aun los más descontentos respecto a cualquier otra cosa, no suelen desear más del que ya tienen. En lo cual no es verosímil que todos se engañen, sino que más bien esto demuestra que la facultad de juzgar y distinguir lo verdadero de lo falso, que es lo que propiamente llamamos buen sentido o razón, es naturalmente igual en todos los seres humanos; y, por tanto, que la diversidad de nuestras opiniones no proviene de que unos sean más razonables que otros, sino tan sólo de que dirigimos nuestros pensamientos por direcciones distintas y no consideramos las mismas cosas. No basta, en efecto tener el ingenio bueno; lo principal es aplicarlo bien. Las almas más grandes son capaces de los mayores vicios como de las mayores virtudes; Y los que andan muy despacio pueden llegar mucho más lejos, si van siempre por el camino recto, que los que corren, pero se apartan de él".



El 29 de mayo de 1953, a las 11:30 de la mañana, Sir Edmund Hillary y el nativo sherpa Tenzing Norkay conquistaron la cumbre del Himalaya, el monte Everest, el más alto del mundo con 8 842 metros de altura. Hillary declaró "Pienso que en la vida todos luchamos contra una montaña como el Everest, y que la clave para lograr el éxito es muy semejante en ambos casos". Así es, amigo lector. Hay una cumbre que cada uno debe alcanzar. Hay una para cada uno. Hay una para ti. Es la cumbre de la vida.

Los jóvenes pueden compararse a los alpinistas. El escritor francés Ernesto Renán dice que la juventud es el descubrimiento del horizonte infinito que es la vida. Puedes fijarte un elevado ideal, tan alto como el Everest, y lanzarte a escalar la cumbre de tu propia existencia. Sólo tú puedes poner límites a tu ideal; sólo tú puedes convertir tu vida en una hermosa y gran realización. Goethe dice que el joven debe erigir tan alta como sea la pirámide de su existencia, cuya base ya le ha sido dada. Tú recibiste al nacer la base de tu pirámide. Ahora te toca construir sobre esa base tu propia existencia. Construye tu pirámide tan alta como sea posible. Tú, y sólo tú, puedes fijar la altura de tu propia cumbre.

Hemos terminado este capítulo, espero que te haya servido para prepararte para iniciar el viaje en el fascinante mundo de las matemáticas. No dudes en repasar este capítulo cuando tengas temor o quieras reforzar tu motivación, la cual te servirá de escudo o protección cuando inicies grandes acciones. Observa bien el camino y sigue atentamente las señales, la simbología y las reglas e instrucciones, para que seguramente llegues a tu destino. Al final del

camino sólo existen 2 pueblos, uno llamado éxito y el otro fracaso, de tu esfuerzo, actitud y optimismo dependerá al poblado que llegues. Recuerda: *"Tú eres el arquitecto de tu propio destino"*.

RESPUESTAS A LAS ACTIVIDADES

GALILEO GALILEI

1. Fue la física, puesto que él era físico.
2. En Italia, debido a que Galileo es italiano.
3. Porque existe duda de que Galileo sea el creador de la ciencia. Las comillas se usan para indicar duda, incertidumbre o sarcasmo.
4. La observación de hechos particulares.
5. La comprobación y la formulación de leyes generales.
6. Explicar los fenómenos naturales.
7. Si ha sufrido cambios, pero no se le ha agregado nada esencial al método.
8. Eran teóricos totalmente, ya que no aceptaban ni practicaban la experimentación.

Maestro Federico: es un grosero usted, lo reprenderá mi esposo, sino se corrige, le meterá una golpiza para que aprenda a educarse. La última vez, no cumplió sus obligaciones usted, debe corregirlo mi esposo, lo golpeará para que aprenda a cumplir con su trabajo. Maestro Federico, es muy inquieto y merece un buen castigo.

Maestro: Federico es un grosero, usted lo reprenderá, mi esposo sino se corrige, le meterá una golpiza para que aprenda a educarse. La última vez, no cumplió sus obligaciones, usted debe corregirlo, mi esposo lo golpeará para que aprenda a cumplir con su trabajo. Maestro, Federico es muy inquieto y merece un buen castigo.

EL HOMBRE QUE CALCULABA

- ✓ Es la base de la razón y el

entendimiento.

- ✓ Es comparar una magnitud con otra que se toma como base de comparación.
- ✓ Es una medida, una cantidad.
- ✓ La permuta de dimensiones, con vistas a simplificar los procesos de medida.
- ✓ Lo que estudia la Aritmética, Álgebra, Geometría.
- ✓ Los números, sus propiedades y transformaciones.
- ✓ La evaluación de dimensiones que varían o que son desconocidas, pero que se pueden representar por medio de relaciones y fórmulas.
- ✓ Los cuerpos o símbolos que tienen forma, tamaño y posición.
- ✓ Es una ciencia que eleva el alma y engrandece al ser humano.
- ✓ Sencillo y modesto.

LA HISTORIA DEL MONARCA YEMENITA

- ✓ Una hermosa princesa que lleva un cántaro de agua pura y fresca.
- ✓ La pintura, la música, la escultura y la arquitectura.
- ✓ La retórica, la dialéctica y la filosofía.
- ✓ Auxiliar a las artes divinas y a las ciencias humanas.
- ✓ La Aritmética.
- ✓ Son instructores o maestros.
- ✓ Una tumba.
- ✓ Vanidoso, indolente y de escasas dotes intelectuales.
- ✓ El desgobierno.

¿EXISTE LA SUERTE?

Entre más trabajos y te prepares más suerte tendrás. Yo no sé si existe la suerte o no, aunque si puedo decir que gracias a mi esfuerzo y dedicación he logrado todo lo que quiero y todo parece indicar que tengo

CAPÍTULO I MOTIVACIÓN

Página 90

mucha suerte. Pero creo que el trabajo y un buen comportamiento y el amor a mis padres, a mi familia y a la sociedad en general, siempre se recompensan en gran manera.

Sin embargo, para los que todavía creen en la suerte, me permito redactarles una leyenda china.

En la antigua China, a aquel campesino que poseía un caballo era considerado como rico y afortunado, por esto Meng Song era envidiado por sus vecinos, ya que tenía un hermoso caballo blanco, el cual lo ocupaba para sembrar la tierra, para cosechar y posteriormente para llevar las cosechas a vender a la ciudad.

Todos sus vecinos con envidia decían: – ¡Que buena suerte! ¡Que buena suerte tienes, Meng Song!.

Pero un día, un vecino envidioso dejó abierta la puerta del corral de Meng Song y el caballo se escapó. Ahora, todos sus vecinos exclamaron: – ¡Que mala suerte! ¡Pero que mala suerte tienes, Meng Song!.

Al tercer día, el caballo de Meng Song regresó junto con otros cinco caballos salvajes. Ahora, todos sus vecinos dijeron: – ¡Que buena suerte! ¡Pero que buena suerte tienes, Meng Song!.

Al otro día, Son Song el hijo mayor de Meng Song trató de domar a los caballos salvajes y uno de ellos lo tumbó tan fuerte que le fracturó una pierna y un brazo. Nuevamente, todos sus vecinos dijeron: – ¡Que mala suerte! ¡Pero que mala suerte tienes, Meng Song!.

En esos días China entró en guerra con Japón y el ejército chino empezó a reclutar a los jóvenes mayores de edad, pero como

Son Song estaba incapacitado no fue seleccionado. Otra vez, todos sus vecinos dijeron: – ¡Que buena suerte! ¡Pero que buena suerte tienes, Meng Song!.

1.- Llegan dos mujeres a la recepción de un Hotel, solicitando una habitación doble para ellas dos. La recepcionista del Hotel les dice que no tiene habitaciones disponibles, porque todas están ocupadas **¿A que horas sucedió esto?**

Respuesta: A la 1:45, porque falta un cuarto para las dos.

2.- Un avión sale de México, D.F. a las 12 horas del mediodía con destino a Mexicali, Baja California. Exactamente a la misma hora sale un avión de Mexicali, Baja California con destino a México, D.F., a la mitad de su recorrido ambos aviones se encuentran. **¿Cómo se llaman los pilotos?**

Respuesta: Los pilotos se llaman por radio.

3.- Los lirios se duplican cada día en el lago de Xochimilco. Al final del mes de junio, el día treinta, el lago está completamente cubierto.

¿En qué momento exacto estuvo cubierto de lirios la mitad del lago?

Respuesta: El día 29 de junio, porque como se duplica cada día, si hoy esta lleno, entonces ayer estuvo a la mitad.

4.- Un poderoso auto Ferrari sale de Puebla para la Ciudad de México a las 8:00 a.m. Una hora después, un ciclista sale de México para Puebla. Cuando se encuentran el Ferrari y el ciclista, **¿cuál está más lejos de Puebla?**

Respuesta: Están a la misma distancia en el momento cuando se encuentran o cruzan.

PARABOLA DEL CABALLO



Un campesino, que luchaba con muchas dificultades, poseía algunos caballos para que lo ayudasen en los trabajos de su pequeña hacienda. Un día, su capataz le trajo la noticia de que uno de los caballos había caído en un viejo pozo abandonado. El pozo era muy profundo y sería extremadamente difícil sacar el caballo de allí.

El campesino fue rápidamente hasta el lugar del

accidente, y evaluó la situación, asegurándose que el animal no se había lastimado. Pero, por la dificultad y el alto precio para sacarlo del fondo del pozo, creyó que no valía la pena invertir en la operación de rescate.

Tomó, entonces, la difícil decisión: Determino que el capataz sacrificase al animal tirando tierra en el pozo hasta enterrarlo, allí mismo. Y así se hizo. Los empleados, comandados por el capataz, comenzaron a lanzar tierra adentro del pozo de forma de cubrir al caballo. Pero, a medida que la tierra caía en el animal este la sacudía y se iba acumulando en el fondo, posibilitando al caballo para ir subiendo. Los hombres se dieron cuenta que el caballo no se dejaba enterrar, sino al contrario, estaba subiendo hasta que finalmente, ¡consiguió salir!

Si estas "allá abajo", sintiéndote poco valorado, y los otros lanzan sobre ti la tierra de la incomprensión, la falta de oportunidad y de apoyo, recuerda el caballo de esta historia. No aceptes la tierra que tiraron sobre ti, sacúdela y sube sobre ella. Y cuanto más tiraren, mas iras subiendo, subiendo, subiendo... Sonriendo, sonriendo, sonriendo... **"SÉ FELIZ, EL MUNDO ES TUYO...SIGUE ADELANTE".**



CAPITULO II

ARITMÉTICA

“La sabiduría clama de fuera, Da su voz en las plazas, Clama en los principales lugares de reunión, En las entradas de las puertas de la ciudad dice sus razones; ¿Hasta cuándo, oh simples, amaréis la simpleza, Y los burladores desearán el burlar, Y los insensatos aborrecerán la ciencia? Volveos a mi repreensión. He aquí os derramaré mi Espíritu, Y os haré saber mis palabras” Proverbios 1:20-23

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN

Debido a que la aritmética es la cimentación en la cual se sostiene el edificio de las matemáticas, este capítulo es fundamental para dominarlas, ya que si no sabemos realizar las operaciones aritméticas, no tendremos éxito en aprender matemáticas, mucho menos lograremos aplicarlas. Es decir, **del éxito que obtengamos en este capítulo, dependerá nuestro futuro éxito en las matemáticas en general.**

Una comprensión completa de la aritmética resulta fundamental para entender adecuadamente las matemáticas básicas, incluyendo al álgebra y la geometría, Por esta razón a la aritmética se le considera “la puerta de entrada” al mundo de las matemáticas. De hecho, considero a la matemática como un túnel, el cual sólo tiene una entrada, aunque muchas ramificaciones y salidas. Así que para poder



Al iniciar cualquier viaje debemos estar totalmente preparados para emprenderlo.

entrar al túnel matemático, es necesario que entremos por su única puerta que es la aritmética. Muchos de mis estudiantes quieren urgentemente aprender matemáticas cuando están reprobados o cuando cursan álgebra, geometría o cálculo; pero esto no es posible, por que el túnel matemático es

cerrado y no tiene otra entrada que no sea la aritmética. Por esta razón, los temas de aritmética que mínimamente se deben aprender son: *Tablas de multiplicar y de sumar, operaciones básicas con números enteros, operaciones básicas con números decimales, operaciones básicas con números fraccionarios.* **Si no dominas estos temas, se te dificultará el aprendizaje de las matemáticas.**

Las llaves que permiten abrir la puerta de la aritmética son: **decisión, ganas, alegría, optimismo, esfuerzo y dedicación**. Sólo con esto podrás abrirla de par en par, entrar por ella y observar las maravillas que te ofrece.

Si estás listo para iniciar el viaje, **abre tu mente y quita el temor y miedo hacia las matemáticas**, ya que **el miedo es el peor enemigo del aprendizaje**.

Recuerda siempre que cada día debes estudiar una unidad completa y que cada unidad incluye su ejercicio.

2.1) DEFINICIÓN DE ARITMÉTICA

Aritmética, literalmente significa, el arte de contar. La palabra deriva del griego *arithmetike*, que combina dos palabras: *arithmos*, que significa 'número', y *techne*, que se refiere a un arte, habilidad o técnica. Su significado etimológico sería el arte o habilidad con los números.¹

Su definición es: **La rama de las matemáticas que se encarga del estudio de los números, sus operaciones y sus aplicaciones**. Todo lo que sea numérico es estudiado por la aritmética. Es una de las más antiguas, ya que por diversas razones la practicaron los pueblos primitivos, quienes tuvieron que idear algún sistema para contar y calcular.

Las operaciones de la aritmética son: **suma, resta, multiplicación, división, potenciación, radicación y logaritmación**. Generalmente solo se consideran como **operaciones aritméticas básicas** a la *suma, resta, multiplicación y división*.

OPERACIÓN DIRECTA	OPERACIÓN INVERSA
Suma	Resta
Multiplicación	División
Potenciación o Exponenciación	Radicación (Extracción de Raíces)
Logaritmación	Antilogaritmación

¹"Aritmética", *Enciclopedia Microsoft® Encarta® 98* © 1993-1997 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

Podemos concluir que existen operaciones directas, donde cada una de ellas tiene su operación inversa. Así, la resta es inversa a la suma, la división a la multiplicación y la radicación a la exponenciación.

En virtud de que la aritmética trabaja exclusivamente con números reales, es necesario estudiar primeramente su clasificación y sus propiedades.

2.2) CONJUNTOS DE NÚMEROS

Conjunto: Colección de elementos u objetos que poseen características comunes.

Para representar los conjuntos se utilizan letras mayúsculas y sus elementos se encierran entre llaves.

Número : Es un símbolo gráfico que nos representa una cantidad.

Dar una definición exacta de número es un poco difícil, **ya que los números son entes abstractos que nos dan idea de cantidad en nuestra mente**, pero no existen como tal en la naturaleza. De hecho, en eso radica la dificultad de las matemáticas, que trabajas con números y signos que no existen en el mundo real. Por lo tanto, tenemos que trabajarlos en nuestra mente, por esto, demandan una gran atención y concentración mental, pero si vas aprendiendo en orden y gradualmente, llegará el momento en que pensarás matemáticamente y a partir de ahí, dominaras totalmente esta materia.

Las matemáticas representan al mundo real sin utilizar elementos del mundo material, de ahí su importancia, pero también su dificultad, ya que sin manipular o tocar las cosas, podemos hacer operaciones con ellas. Por ejemplo, podemos hacer operaciones con los números sin necesidad de manipular las cantidades o cosas reales que representan, por ejemplo, sumar 4300 naranjas con 5250 naranjas sin reunir las naranjas en un recipiente o algún lugar. Puedes hacer los cálculos u operaciones anticipadamente, aun antes de que se realicen en la realidad. Por ejemplo, ¿Cuántos pantalones de mezclilla de \$120 pesos me puedo comprar la próxima semana con \$ 500 pesos? **Como humano tienes la idea de número y aptitudes suficientes para las matemáticas**, ya que sin hacer la división sabes que son 4 pantalones los que te puedes comprar con esa cantidad.

En nuestro sistema de numeración decimal, utilizamos como base el número 10 y las siguientes *cifras* o *guarismos*:

$$\{ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 \}$$

Combinando estos símbolos de manera conveniente, pueden representarse todos los números. Observa que debido a la base utilizada, estos diez símbolos combinados son suficientes para formar todos los números por muy grandes o

pequeños que sean. También, que sólo trabajarás con estos 10 símbolos y sus combinaciones.

Por ejemplo, el número 3, nos representa tres unidades, el 7, siete unidades, el 15, quince unidades, etc.

Al número solo, como el 12, se le denomina **número abstracto** y nos puede representar 12 unidades de cualquier clase. En cambio, cuando se especifica la clase, unidad o tipo además del número, entonces se dice que es un **número concreto**, por ejemplo, 12 manzanas, 3 cuadernos, 10 lápices, 15 metros, 7 kilómetros por hora; todos son ejemplos de números concretos.

Los números abstractos se suman con números abstractos y los números concretos con números concretos pero del mismo tipo. Por ejemplo, si tengo 3 manzanas + 5 naranjas y a eso le agrego 9 naranjas + 7 manzanas, entonces resulta:

$$(3 + 7) \text{ manzanas} + (5 + 9) \text{ naranjas} = 10 \text{ manzanas} + 14 \text{ naranjas.}$$

En cambio, si se trata de puros números abstractos, si a $3+5$ le añado $9+7$, entonces resulta: $8 + 16 = 24$. Como no se especifica su tipo, entonces pueden sumarse todos los números directamente.

Número Dígito: es el que consta de una sola cifra o guarismo. Por ejemplo, 1, 2, 3, 4, 9. La palabra dígito proviene de dedo, ya que se utilizaban los dedos para contar. Actualmente, se utiliza mucho la palabra digital, principalmente en las computadoras y la electrónica. Digital significa que trabaja o procesa información almacenada numéricamente. Por ejemplo, el “*Compact Disc*” o disco compacto y el DVD “*Digital Versatile Disc*” almacenan la música, vídeo, animación, texto, sonido y películas en secuencias de números, combinaciones sólo de ceros y unos. Es increíble que todos estos tipos de información los trabajen numéricamente. **La Computadora y la Electrónica Digital, son los mayores inventos basados en las matemáticas.**

A continuación debes conocer e identificar los diferentes tipos de números:

Números Naturales: son los números que utilizamos para contar y que se denominan también números enteros positivos. Se representan por:

$$\mathbf{N} = (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, \dots)$$

Los puntos suspensivos indican que la serie continua indefinidamente, es decir, los números naturales no tienen fin.

El nombre de *naturales* se debe a que estos números surgieron en forma espontánea o natural, cuando el hombre tuvo necesidad de contar sus objetos o

pertenencias. Por esta razón, los números naturales fueron el primer conjunto de números que se formó.

Algunos autores consideran el 0 como número natural, pero la mayoría no lo considera así, ya que el 0 apareció con posterioridad al surgimiento de los números naturales.

Los números naturales tienen las siguientes propiedades:

N1) **Todo número natural tiene un único entero positivo como sucesor suyo.** Por ejemplo, el sucesor de 10 es 11, de 5528 es 5529, etc.

N2) **Los números naturales forman un conjunto cerrado respecto a la suma y multiplicación**, es decir, al sumar o multiplicar dos números naturales da como resultado un número natural.

Por ejemplo, $28 + 35 = 63$
 $(28)(35) = 980$

Los resultados 63 y 980 son números naturales.

 **Nota:** La división y la resta de 2 números naturales podría no dar como resultado un número natural. Es decir, estas operaciones no son cerradas.

En la recta numérica los números naturales se representan por:



Números Enteros: Se definen como los números que contienen a la unidad una cantidad exacta de veces También, como aquellos que representan cantidades completas y no incluyen punto decimal. Se forman por los enteros negativos, el cero y los enteros positivos.

Esto es:

$$\mathbb{Z} = (\dots, -10, -9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \dots)$$

Los números naturales son un *subconjunto* o una parte de los números enteros.

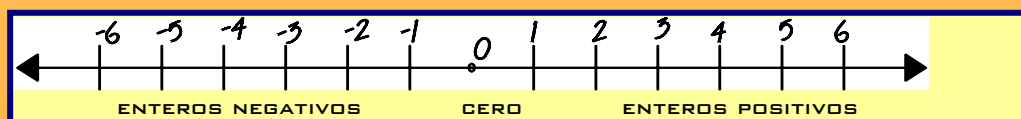
Los enteros positivos generalmente **se utilizan para representar aquello que nos beneficia**, tales como: ganancias, incrementos, crecimientos, altas, pagos, ingresos, etc. Los enteros negativos generalmente **representan lo que nos perjudica**, tales como pérdidas, disminuciones, decrementos, bajas, deudas, etc.

Obviamente, no nos beneficia incrementar nuestras deudas o nuestras enfermedades, ya que esto son cantidades negativas y nos perjudican.

Por ejemplo:

ACCION	SE REPRESENTA POR
Gané 300	+300
Perdí 200	-200
Creció 5	+5
Bajé 10	-10
Debo 600	-600
Recibí 800	+800
Cobré 1500	+ 1500
30 Años A.C.	- 30
1844 Años D.C.	+ 1844
Descendí 12	- 12

En la recta numérica los números enteros se representan como:



Sus propiedades son:

(Z1) **Un número colocado a la derecha es mayor que los que están a su izquierda.**

Por ejemplo:

- (a) $7 > 3$ Porque el 7 está a la derecha de 3.
el símbolo " $>$ " se lee como "mayor que"
- (b) $-3 < 0$ Porque el -3 está a la izquierda de 0.
El símbolo " $<$ " se lee como "menor que".
- (c) $-4 > -5$ Porque -4 está a la derecha de -5.
- (d) $-8 < -3$ Porque -8 está a la izquierda de -3.

Observa que la punta de los símbolos siempre señala hacia el número menor.



Nota: el cero es mayor que todos los números negativos, por que está a la derecha de todos ellos.

Algunas propiedades de los números enteros son:

(Z2) **El conjunto de números enteros son cerrados respecto a la suma, resta y multiplicación.** Es decir, la suma, resta y multiplicación de 2 números enteros da como resultado un número entero.

(Z3) **El conjunto de números enteros son simétricos, es decir, para todo número a existe un número $-a$.** Por ejemplo, de $+3$ su simétrico es -3 , de -17 su simétrico es 17 .

Números simétricos: son aquellos números que están a la misma distancia del origen de la recta numérica. Por ejemplo: 7 y -7 , -4 y 4 .

Una propiedad interesante es la siguiente:

Propiedad: La suma de dos números simétricos entre si es igual a 0 .

Esto es: $a + -a = a - a = 0$

Por ejemplo, $-6 + 6 = 0$
 $6 + -6 = 0$

Números Racionales: son aquellos que se pueden expresar como cociente de 2 números enteros y se representan por:

$$\frac{a}{b} \text{ siendo } b \neq 0$$

Esto significa que los números racionales, se pueden escribir de la forma a/b siendo a y b números enteros, con la condición de que $b \neq 0$, esto se lee como **b diferente de 0** .

Por ejemplo:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{5}{4}, -\frac{3}{7}, \frac{11}{2}, \frac{5}{1}, \frac{1}{5}, \text{etc.}$$

Todos estos números son racionales.

Puede verse que los famosos **quebrados o fracciones**, son números racionales.

Si dividimos los números enteros entre la unidad, los números no cambian. Esto es:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{1}, \frac{4}{1}, \frac{5}{1}, -\frac{5}{1}, -\frac{4}{1}, -\frac{3}{1}, -\frac{2}{1}, -\frac{1}{1}, \text{etc.}$$

Esto significa que los **números enteros** son un *subconjunto* de los números racionales. Lo que implica que hay más números fraccionarios o quebrados que números enteros, por lo tanto, necesitamos aprender a hacer operaciones con fracciones al igual que con enteros.

Los números cuyas cifras decimales se repiten infinitamente o cíclicamente, también son racionales. Los números racionales se representan por Q .

Ejemplos :

$$\frac{1}{3} = 0.3333333333 \ 33333333 \dots$$

$$\frac{2}{3} = 0.6666666666 \ 66666666 \dots$$

$$\frac{1}{6} = 0.1666666666 \ 66666666 \dots$$

$$\frac{2}{11} = 0.1818181818 \ 18181818 \dots$$

$$\frac{3}{7} = 0.4285714285 \ 7142857142 \ 8571 \dots$$

$$\frac{3}{13} = 0.023076923 \ 0769230769 \ 2307692 \dots$$

Números Irracionales: son aquellos números que no son racionales, es decir, no pueden expresarse como cociente de dos enteros.

Los números cuya fracción decimal no termina ni se repite cíclicamente, son números irracionales. Se representan por $\mathbf{Q'}$

Ejemplos de Números Irracionales:

$$\sqrt{3} = 1.73205080 \ 7569 \dots$$

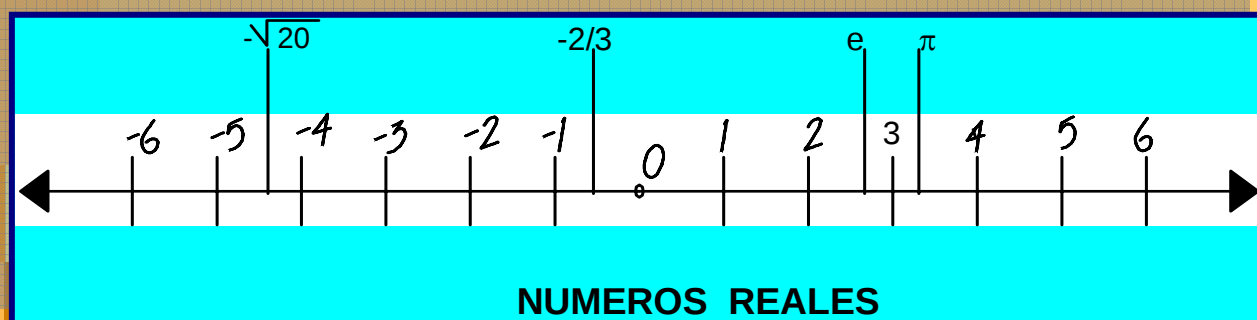
$$\pi = 3.14159265 \ 359 \dots$$

$$e = 2.71828182 \ 8459 \dots$$

$$\sqrt{2} = 1.41421356 \ 2373 \dots$$

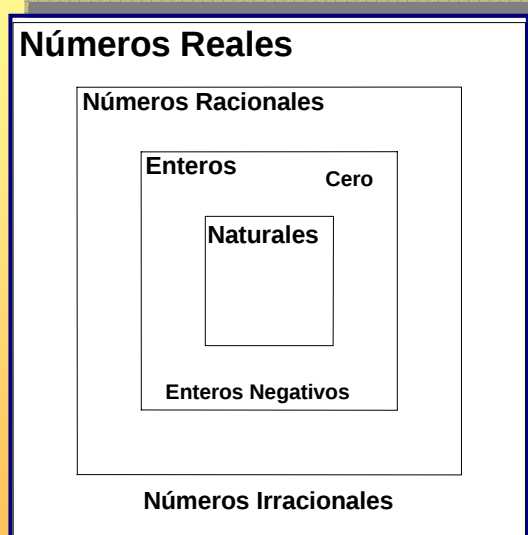
etc.

Números Reales: Es el conjunto de números compuesto por los números racionales y los números irracionales. Se representan por $\mathbf{R}$.



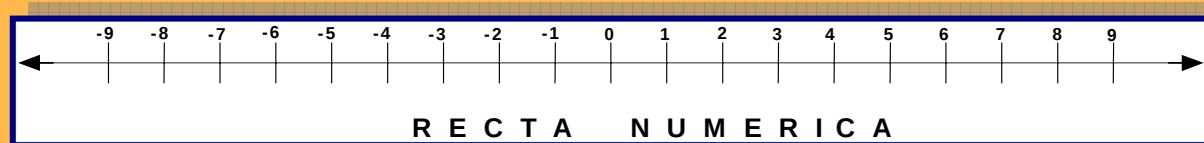
En la gráfica anterior se representan los números irracionales: π , e , $-\sqrt{20}$ y el número racional $-2/3$, además de algunos números enteros. Todos ellos son números reales.

En el esquema siguiente se muestra la relación existente entre los diferentes conjuntos de números:



2.3) RECTA NUMÉRICA

Es una línea graduada en donde se representan exclusivamente los números reales. A cada punto de la recta le corresponde uno y solo un número real, e inversamente, a cada número real le corresponde uno y solo un punto de la recta numérica. A esta relación se le conoce como **correspondencia biunívoca** (única entre dos).



En la recta numérica podemos sumar y restar, para lo cual, **nos moveremos a la derecha cuando la cantidad sea positiva y a la izquierda si es negativa**.

Por ejemplo, para sumar $5 + 7$, del origen o 0, nos movemos 5 unidades a la derecha, quedando en el número 5; ahora a partir del 5, nos movemos 7 unidades a la derecha, debiendo ser el resultado igual a 12, puesto que sobre este número quedamos situados. También, para sumar $-3 + -6$, primero nos movemos 3 unidades a la izquierda y a partir del -3 nos movemos 6 unidades a la izquierda y el resultado es -9, puesto que sobre este número quedamos situados.

De la misma forma, para sumar $5 + -7$, del origen o 0, nos movemos 5 unidades a la derecha, quedando en el número 5; ahora a partir del 5, nos movemos 7 unidades a la izquierda, debiendo ser el resultado igual a -2, puesto que sobre este número quedamos situados. También, para sumar $12 + -9$, primero nos

movemos 12 unidades a la derecha y a partir del 12 nos movemos 9 unidades a la izquierda y el resultado es 3, puesto que sobre este número quedamos situados.

Observa que la primera cantidad siempre se ubica a partir del 0, por ser el origen y los demás sumandos a partir de la posición del sumando anterior.

2.4) VALOR ABSOLUTO

Los números tienen un valor independientemente de su posición en la recta numérica, esto es el valor absoluto de un número, *es la distancia del 0 al número, sin tomar en cuenta el sentido del recorrido*, es decir, si esta a la izquierda o a la derecha del cero.

El valor absoluto de un número se representa por 2 barras verticales, o sea: $|x|$

$$|7| = 7$$

$$|-7| = 7$$

Observa que el valor absoluto de un número, es igual al número pero sin signo, es decir, **el valor absoluto siempre da como resultado un número positivo.**

Por ejemplo: (a) $|10 - 7| = |3| = 3$

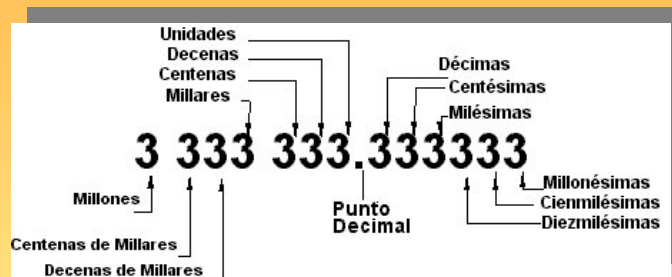
(b) $|7 - 10| = |-3| = 3$

(c) $|15 - 11| = |4| = 4$

(d) $|10 - 15| = |-5| = 5$

En nuestro sistema de numeración decimal, un número está compuesto de diferentes cifras, cuyo valor depende de la posición que ocupe dentro del número, es decir, nuestro sistema de numeración es posicional. Por conveniencia, a cada posición se le ha designado un nombre, mostrándose estos en la siguiente figura:

Por ejemplo:



3	Representa 3 unidades
33	Representa 3 decenas y 3 unidades
333	Representa 3 centenas, 3 decenas y 3 unidades
3333	Representa 3 millares, 3 centenas, 3 decenas y 3 unidades
0.3	Representa 3 décimos

0.33	Representa 3 décimos y 3 centésimos
0.333	Representa 3 décimos, 3 centésimos y 3 milésimos

En este caso el número 3, toma diferentes valores de acuerdo a la posición donde se encuentre. A cada posición se le asigna un nombre, el cual puede verse en la figura anterior. Al ir avanzando a la izquierda, cada una de las posiciones es una unidad de orden superior, diez veces mayor a la anterior. Al ir avanzando a la derecha, cada una de las posiciones es una unidad de orden inferior, diez veces menor a la anterior.



Ejercicio 1

Contesta correctamente lo siguiente:

1.- Escribe 5 ejemplos de números racionales.

_____, _____, _____, _____, y _____.

2.- Escribe los simétricos de los números que escribiste anteriormente.

_____, _____, _____, _____, y _____.

3.- Escribe los símbolos $<$ o $>$ según corresponda entre los siguientes pares de números.

a) 15 ___ 21

b) -8 ___ -5

c) 10 ___ 7

d) 2 ___ -12

e) 5 ___ 5

f) -12 ___ -17

4. Escribe en forma clara, breve y correcta, preferentemente con tus propias palabras, los conceptos de **aritmética**, **conjunto**, **número**, **números naturales**, **enteros**, **racionales**, **irracionales** y **reales**. Auxíliate de otros libros de aritmética, de diccionarios o de enciclopedias e Internet.

5. ¿Cuántos pasos de una unidad deben darse en la recta numérica para moverse de -4 a 13?

6. ¿Cuántos pasos de una unidad deben darse en la recta numérica para moverse de 7 a -5?

7. ¿Cuántos pasos de una unidad deben darse en la recta numérica para moverse de -2 a -9 ?

8. ¿Cuántos pasos de una unidad deben darse en la recta numérica para moverse de 3 a 14 ?

9. Efectuar en la recta numérica las operaciones siguientes:

- a) $11 + 6 - 7 - 5 + 8 - 9$
- b) $-11 + 8 - 15 + 5 - 3 + 9$
- c) $-10 - 7 + 5 - 3 + 12 - 19$
- d) $11 - 16 + 8 - 15 + 18 - 4$

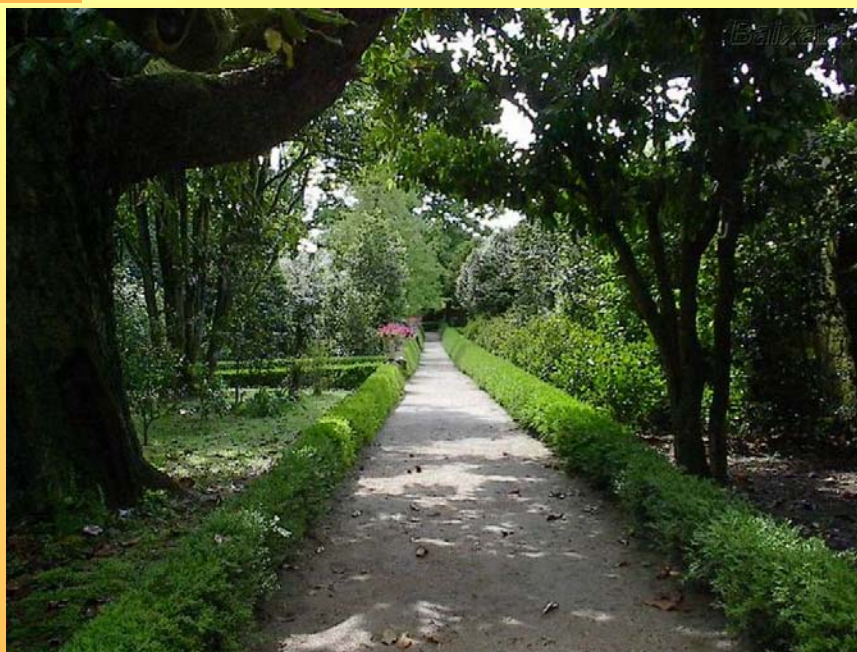
10. Una gran compañía reportó que al inicio del año tenía un balance de $+$ \$ 1275 millones de pesos. Si al terminar el año tuvo una ganancia neta de \$ 376 millones y pagó impuestos por un total de \$ 237 millones. ¿Cuál es su estado contable actual?

11. Si el punto más profundo en el mar es de 11 520 metros y el más alto en la superficie terrestre es de 8 843 metros sobre el nivel del mar ¿Cuál es la diferencia entre esta depresión y elevación?

12. Platón nació en 429 A. C. (antes de Cristo) y murió en 348 A. C. ¿Cuántos años vivió? Las fechas antes de Cristo se consideran negativas y van reduciendo su valor a medida que se acercan al cero.

Si tuviste éxito resolviendo el ejercicio anterior, seguro tienes cualidades extraordinarias para las matemáticas y estás en el camino correcto. Si no fue así, entonces repasa la unidad hasta que puedas resolver correctamente todos los ejercicios. En caso extremo pide ayuda a un amigo o a un maestro de matemáticas que sea paciente y amable.

¿Te gusta el camino del éxito? ¿Verdad que es bonito?



OPERACIONES ARITMÉTICAS BÁSICAS

UNIDAD II

2.5) SUMA DE NÚMEROS ENTEROS

A La suma también se le llama Adición. Es la operación que consiste en dados varios números llamados sumandos, reunirlos en un solo número denominado resultado o suma. La operación de sumar se representa por el signo +, que se lee más.

Así la expresión $5 + 7 + 12 + 3$, significa que los números 5, 7, 12, 3 deben sumarse. A cada uno de ellos se le llama sumandos o términos de la suma.

Si designamos a S como la suma o resultado y utilizamos el signo de relación “=” que se lee “igual a”, entonces podemos escribir la suma como:

$$S = 5 + 7 + 12 + 3$$

A una expresión de esta forma se le llama igualdad; lo que está del lado izquierdo de la igualdad se le llama **primer miembro** y a lo que está del lado derecho se le llama **segundo miembro**. La igualdad significa que el primer miembro es exactamente equivalente al segundo miembro, sin importar que sus números de sumandos o términos sean distintos.

Realizando la suma de lado derecho, queda $S = 27$, lo que significa que para que sea igualdad en lugar de S tienes que colocar su equivalente 27, ya que “Toda expresión puede sustituirse por su igual”, esto es:

$$27 = 5 + 7 + 12 + 3$$

En este caso, 27 es la suma y 5, 7, 12 y 3 son los sumandos.

2.5.1) CÁLCULO DE LA SUMA

Para calcular la suma se procede de la forma siguiente:

Por ejemplo, sea calcular la suma de $1647 + 735$

Designando por S la suma que deseamos calcular, queda:

$$S = 1647 + 735$$

Separando cada sumando en sus unidades de diversos órdenes, se obtiene:

$$S = (1 \text{ millar} + 6 \text{ centenas} + 4 \text{ decenas} + 7 \text{ unidades}) + (7 \text{ centenas} + 3 \text{ decenas} + 5 \text{ unidades})$$

Ahora ordenando y colocando cada unidad con las de su mismo tipo, ya que en matemáticas sólo se pueden sumar cantidades del mismo tipo a los cuales se les llama **términos semejantes**, se obtiene:

$$S = 1 \text{ millar} + 6 \text{ centenas} + 7 \text{ centenas} + 4 \text{ decenas} + 3 \text{ decenas} + 7 \text{ unidades} + 5 \text{ unidades}$$

Empezando la suma a partir de las unidades, ya que al sumarlas nos podrían rebasar las 10 unidades y dar origen a una decena, que es una unidad de orden superior. Si al sumar las unidades rebasamos las diez unidades, como en este caso 7 unidades más 5 unidades nos dan 12 unidades, entonces dejamos solo las 2 unidades y nos llevamos 1 decena para sumarla con las decenas; a esta operación se le llama **acarreo**.

$$\text{Queda: } S = 1 \text{ millar} + 6 \text{ centenas} + 7 \text{ centenas} + 4 \text{ decenas} + 3 \text{ decenas} + 1 \text{ decena} + 2 \text{ unidades}$$

Ahora sumando las decenas, 4 decenas + 3 decenas + 1 decena = 8 decenas. Como no rebasó las 10 decenas, se dejan las 8 decenas.

$$\text{Esto es: } S = 1 \text{ millar} + 6 \text{ centenas} + 7 \text{ centenas} + 8 \text{ decenas} + 2 \text{ unidades}$$

Ahora sumando las centenas, 6 centenas + 7 centenas = 13 centenas. Como rebasó las 10 centenas, entonces dejamos 3 centenas y nos llevamos 1 millar igual a 10 centenas, para sumarlo con los millares.

$$\text{Queda: } S = 1 \text{ millar} + 1 \text{ millar} + 3 \text{ centenas} + 8 \text{ decenas} + 2 \text{ unidades}$$

Sumando los millares, 1 millar más 1 millar es igual a 2 millares.

Finalmente la suma sería:

$$S = 2 \text{ millares} + 3 \text{ centenas} + 8 \text{ decenas} + 2 \text{ unidades}$$

Escribiendo el resultado sin las unidades de diverso orden, queda:

$$S = 2382, \text{ es decir, } 1647 + 735 = 2382.$$

Lo anterior, te lo mostré con el objeto de que sepas como se obtuvo el método para hacer la suma, ya que efectivamente existe un método más abreviado y práctico, el cual es el que utilizaremos de ahora en adelante, ya que nos permite hacer las sumas en forma más rápida.

A continuación te escribo los pasos para hacer la suma con 2 o más sumandos de números enteros:

2.5.2) REGLA PARA SUMAR NÚMEROS ENTEROS

- 1) Se disponen todos los sumandos de manera tal que queden alineados por la columna de sus unidades.
- 2) La suma se realiza de derecha a izquierda. Se suman las unidades de todos los sumandos, de este resultado, anotamos los valores de las unidades que sean inferiores a 10 y acarreamos las unidades de orden superior (mayores que 10) que resulten. Se continúa de la misma forma sumando la columna de las decenas, centenas, millares, etc., Hasta que no quedan más elementos de orden superior. El resultado obtenido es la suma buscada.
- 3) Se comprueba la suma, cambiando el orden de los sumandos o mediante la regla del 9, la cual se tratará más adelante.

Ejemplos : 1.- Sumar 37 748, con 8 839, con 575, con 17 y con 8.

Solución: Alineando los sumandos por su columna de las unidades

$$\begin{array}{r}
 37748 \\
 8839 \\
 + \quad 575 \\
 \quad 17 \\
 \quad \quad 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

Sumando las unidades $8 + 9 + 5 + 7 + 8 = 37$ anotamos 7 y nos llevamos 3 a la columna de las decenas.

Se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 8 \\
 8 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \\
 + \quad \quad 5 \quad 7 \quad 5 \\
 \quad \quad 1 \quad 7 \\
 \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 \quad \quad \quad 7
 \end{array}$$

3 Acarreo

Ahora sumando la columna de las decenas, se tiene: 3 (acarreo) + 4 + 3 + 7 + 1 = 18. Anotamos 8 y nos llevamos 1 a la columna de las centenas. Queda:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 8 \\
 8 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \\
 + \quad \quad 5 \quad 7 \quad 5 \\
 \quad \quad 1 \quad 7 \\
 \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 \quad \quad 8 \quad 7
 \end{array}$$

1 3 Acarreos

Ahora sumando la columna de las centenas, se tiene: 1 (acarreo) + 7 + 8 + 5 = 21. Anotamos 1 y nos llevamos 2 a la columna de los millares. Se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 3 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 8 \\
 8 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \\
 + \quad \quad 5 \quad 7 \quad 5 \\
 \quad \quad 1 \quad 7 \\
 \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 \quad 1 \quad 8 \quad 7
 \end{array}$$

2 1 3

Ahora sumando la columna de los millares, se tiene: $2 \text{ (acarreo)} + 7 + 8 = 17$. Anotamos 7 y nos llevamos 1 a la columna de los diez millares. Se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 \text{1} \quad \text{2} \quad \text{1} \quad \text{3} \\
 3 \quad 7 \quad 7 \quad 4 \quad 8 \\
 \quad \quad 8 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \\
 + \quad \quad \quad 5 \quad 7 \quad 5 \\
 \quad \quad \quad \quad 1 \quad 7 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad 8 \\
 \hline
 7 \quad 1 \quad 8 \quad 7
 \end{array}$$

Finalmente, sumando la columna de los diez millares, $1 \text{ (acarreo)} + 3 = 4$.

1	2	1	3	Acarreos	
3	7	7	4	8	Sumando
	8	8	3	9	Sumando
+		5	7	5	Sumando
			1	7	Sumando
				8	Sumando
4	7	1	8	7	Suma o Resultado

2.- Sumar 77 849 332, con 457 202, con 84 520 017, con 345 323 y con 1 961. Solución: alineando los sumandos por la columna de sus unidades y realizando la suma respetando los acarreos, se obtiene lo siguiente:

1	1	2	1	2	1	1	1	Acarreos	
	7	7	8	4	9	3	3	2	Sumando
			4	5	7	2	0	2	Sumando
+	8	4	5	2	0	0	1	7	Sumando
			3	4	5	3	2	3	Sumando
					1	9	6	1	Sumando
1	6	3	1	7	3	8	3	5	Suma o Resultado

2.5.3) REGLA DEL NUEVE

Es una regla muy útil para comprobar las operaciones aritméticas de suma, resta, multiplicación y división. Está basada en el criterio de divisibilidad entre 9, el cual expresa “Para saber si un número es divisible entre 9, sumamos todas sus cifras o guarismos hasta obtener un número menor o igual que 9. Si la suma es 0 o un múltiplo de 9, entonces el número es divisible por 9, si no el residuo de la división será igual al número obtenido en la suma”.



Nota: Cuando al hacer operaciones aplicando la regla del 9, nos resulte un número negativo, como podría suceder en la resta, entonces a dicho número negativo le sumamos 9, hasta que nos dé un resultado positivo y este valor será el resultado de la regla del 9 buscada.

Ejemplos: Verificar si los números siguientes son divisibles entre 9.

1. 347 854

Solución: sumando sus cifras $3 + 4 + 7 + 8 + 5 + 4 = 31$. Continuamos sumando ya que el número obtenido no es menor o igual que 9. Queda $3 + 1 = 4$. Por lo tanto al dividir 347 854 entre 9 su residuo es de 4.

2. 7 238 723 982 378

Solución: sumando sus cifras $7 + 2 + 3 + 8 + 7 + 2 + 3 + 9 + 8 + 2 + 3 + 7 + 8 = 69$. Sumando nuevamente, $6 + 9 = 15$, sumando otra vez, $1 + 5 = 6$. Por lo tanto al dividir 7 238 723 982 378 entre 9 su residuo será 6.

3. 546 372 180 911 322

Solución: sumando sus cifras o guarismos $5 + 4 + 6 + 3 + 7 + 2 + 1 + 8 + 0 + 9 + 1 + 1 + 3 + 2 + 2 = 54$. Continuando la suma $5 + 4 = 9$. Por lo tanto, al dividir 546 372 180 911 322 entre 9, la división es exacta y su residuo es 0.

La anterior propiedad me ha permitido crear algunos trucos matemáticos, que a lo largo de este libro te haré conocer.

2.5.4) COMPROBACION DE LA SUMA USANDO LA REGLA DEL 9

Para comprobar la suma, se le aplica la regla del 9 a cada uno de los sumandos, esto es, cada uno de los dígitos de los sumandos se suman hasta obtener una sola cifra, estas cifras se suman y deben dar igual a la cifra que resulta al aplicarle la regla del 9 al resultado.

Es decir, la comprobación mediante la regla del 9, se aplica exactamente tal como se realiza la operación, o sea:

Regla del 9 del sumando 1 + regla del 9 del sumando 2 + + regla del 9 del sumando n = regla del 9 para el resultado de la suma.

Ejemplo: Realizar y comprobar la suma de 4831, con 53227 y 15923.

					REGLA DEL 9	
	4	8	3	1	$4+8+3+1=16 = 1 + 6$ $=7$	7
+	5	3	2	2	$5+3+2+2+7=19$ $1+9=10 = 1+0=1$	1
	1	5	9	2	$1+5+9+2+3=20$ $2+0=2$	2
	7	3	9	8	1	1
					Resultado o Suma	1

Comprobación: sumando los dígitos de la regla del 9 de los sumandos, esto es:
 $7 + 1 + 2 = 10 = 1 + 0 = 1$.

Al aplicarle la regla del 9 al resultado, se obtiene $7 + 3 + 9 + 8 + 1 = 28$, o sea:
 $2 + 8 = 10 = 1 + 0 = 1$

En virtud de que ambos resultados de la regla del 9 son iguales, se concluye que la suma es correcta.

Ejemplo: Realizar y comprobar la suma de 34231, con 45325 y 73523.

							REGLA DEL 9	
3 4 2 3 1							$3 + 4 + 2 + 3 + 1 = 13$ $1 + 3 = 4$	4
+	4 5 3 2 5						$4 + 5 + 3 + 2 + 5 = 19$ $1 + 9 = 10 = 1 + 0 = 1$	1
7 3 5 2 3							$7 + 3 + 5 + 2 + 3 = 20$ $2 + 0 = 2$	2
1 5 3 0 7 9							7	Resultado o Suma
							7	

Comprobación: sumando los dígitos de la regla del 9 de los sumandos, esto es:

$$4 + 1 + 2 = 7.$$

Al aplicarle la regla del 9 al resultado, se obtiene $1 + 5 + 3 + 0 + 7 + 9 = 25$, o sea:

$$2 + 5 = 7.$$

En virtud de que ambos resultados de la regla del 9 son iguales, se concluye que la suma es correcta.

2.5.5) COMPLEMENTO A 9

Otra de las propiedades muy útiles del número 9, es el concepto de complemento a nueve, es decir, el número que le falta a un número dado para sumar 9. Por ejemplo, el complemento de 5 es 4, ya que $5 + 4 = 9$. También, el complemento de 9 es 0, ya que $9 + 0 = 9$, de la misma forma, el complemento de 0 es 9, ya que $0 + 9 = 9$.

Resumiendo :

NÚMERO	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
COMPLEMENTO	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Nota que si los números los escribimos en orden creciente, los complementos quedan en orden decreciente.

Por ejemplo, para hallar el complemento a nueve de un número de varias cifras, hallamos el complemento a 9 de cada una de las cifras dadas, siendo el complemento a 9 la unión de todos los complementos individuales. Por ejemplo, si nos dan la cifra 37, su complemento a 9 sería, 6 para el 3 y 2 para el 7, por lo tanto su complemento a 9 es 62. De la misma forma, para 238 356, su complemento a 9, es 761 643. En algunas aplicaciones es muy útil el complemento a 9.

A continuación te presento el truco matemático que yo denomino LA SUMA ANTICIPADA. Es un truco que siempre cuento a mis alumnos cuando vemos el tema de SUMA DE NÚMEROS ENTEROS y sirve para darme cuenta si saben sumar.

2.5.6) LA SUMA ANTICIPADA

Se pide a alguien que escriba un número de 5 cifras, las que quiera, preferentemente que no se repitan mucho. Escriben por ejemplo: 65 423.

Le dices que vamos a hacer una suma de 5 sumandos y que el resultado de la suma será 265 421. ¿Todavía no se ha hecho la suma y tú ya tienes el resultado?

¿Cómo se obtiene? De la cifra o cifras de la derecha restas 2 unidades, en este caso $23 - 2 = 21$. El número que te queda es 65 421. Las 2 unidades que quitaste las pones al principio del número y ese será el resultado. Esto es, 265 421.

Después, le pides que escriba otra cifra, la que él quiera, debajo de la que ya había escrito y alineada por que vamos a hacer una suma. Por ejemplo, escribe 68 701. Hasta ahora él ha escrito 2 números de 5 cifras, o sea:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 1 \\
 + \\
 \hline
 \end{array}$$

Después, de este número tu tienes que escribir para cada cifra su complemento a 9, esto es: 3 1 2 9 8. Hasta ahora la suma es:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 1 \\
 + \ 3 \ 1 \ 2 \ 9 \ 8 \\
 \hline
 \end{array}$$

Le pides nuevamente que escriba otro número, el que él quiera, por ejemplo, si él escribe 36634. La suma hasta ahora es:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 1 \\
 + \ 3 \ 1 \ 2 \ 9 \ 8 \\
 3 \ 6 \ 6 \ 3 \ 4 \\
 \hline
 \end{array}$$

Ahora, para este último número tú escribes su complemento a 9, o sea:
6 3 3 6 5. La suma queda como:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 1 \\
 + \ 3 \ 1 \ 2 \ 9 \ 8 \\
 \hline
 3 \ 6 \ 6 \ 3 \ 4 \\
 6 \ 3 \ 3 \ 6 \ 5 \\
 \hline
 \end{array}$$

Finalmente, le pides que haga la suma. Por supuesto, tiene que coincidir exactamente con el resultado, si tus operaciones como matemático fueron correctas.

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 6 \ 8 \ 7 \ 0 \ 1 \\
 + \ 3 \ 1 \ 2 \ 9 \ 8 \\
 \hline
 3 \ 6 \ 6 \ 3 \ 4 \\
 6 \ 3 \ 3 \ 6 \ 5 \\
 \hline
 2 \ 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

Él escribe el número. Tu con este escribes el resultado.

Él escribe su segundo número

Tu escribes el complemento a nueve del número anterior

Él escribe su tercer número

Tu escribes el complemento a nueve del número anterior

El resultado obtenido es el mismo que tu escribiste al principio.

¡Asombroso! ¿Porque funciona el truco? Porque después de la primera cifra que él escribió y que con esa obtuviste el resultado, el segundo y tercer sumando al complementarlos a 9, se reducen a 99 999 y lo mismo sucede con el cuarto y quinto sumando. Por lo que la suma, en realidad se reduce a:

$$\begin{array}{r}
 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 3 \\
 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\
 + \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \ 9 \\
 \hline
 2 \ 6 \ 5 \ 4 \ 2 \ 1
 \end{array}$$

Ahora bien, $99\ 999 + 99\ 999 = 199\ 998$, por esa razón, para obtener el resultado, al número dado tienes que disminuirlo en 2 y aumentar ese 2 al principio del número dado.

Por si te quedó alguna duda, a continuación te doy otro ejemplo más de este truco:

Suponiendo que la otra persona escribió 92 341, a 41 le restamos 2, quedan 39, o sea, 92 339. Colocándole un 2 al principio, el resultado debe ser 292 339. Al complementar a 9 las cifras que el otro escribe, no importa que cifras escriba, ya que tu tienes el control mediante el complemento a 9.

	9	2	3	4	1	Él escribe el número. Tu con este escribes el resultado.
	2	1	5	2	5	Él escribe su segundo número
+	7	8	4	7	4	Tu escribes el complemento a nueve del número anterior
	9	5	7	4	9	Él escribe su tercer número
	0	4	2	5	0	Tu escribes el complemento a nueve del número anterior
	2	9	2	3	3	9

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA SUMA

1) Una fabrica tiene 77 empleados y contrata 16 empleados más. ¿Cuántos empleados tiene ahora?

Solución:

$$77 \text{ empleados} + 16 \text{ empleados nuevos} = \mathbf{93 \text{ empleados}}$$

2) La distancia de recorrido de Zumpango del Río a Chilpancingo es de 16 kilómetros y de Chilpancingo a las Grutas de Juxtlahuaca es de 28 kilómetros. ¿Cuál es la distancia de recorrido de Zumpango del Río a las Grutas de Juxtlahuaca?

Solución:

$$16 \text{ Km.} + 28 \text{ Km.} = \mathbf{44 \text{ Kilómetros}}$$

3) En la colecta nacional de la Cruz Roja, Matuco reunió \$ 275 pesos, Lucyana \$178 pesos, Federico \$ 198 pesos y Agapito \$ 207 pesos. ¿Cuánto reunieron entre todos ellos?

Solución:

$$\text{\$ 275 pesos} + \text{\$ 178 pesos} + \text{\$ 198 pesos} + \text{\$ 207 pesos} = \text{\$ 858 pesos}$$



Ejercicio 2.

Nota: En ninguno de los ejercicios de Aritmética debes usar calculadora, ya que estamos tratando de desarrollar tu habilidad de cálculo. Por esto, debes hacer las operaciones manualmente si verdaderamente quieres aprender. Al final del libro están las respuestas a todos los ejercicios, para que puedas verificar las tuyas y veas tu grado de avance. No pases a la unidad siguiente sin haber resuelto correctamente sus problemas correspondientes.

Realiza lo que se te pide y comprueba cada suma con la regla del 9 antes de ver la solución.

1. Sumar 125, con 37 y con 19.
2. Sumar 353, con 3774 y con 128.
3. Sumar 4 665, con 9 876 y con 977.
4. Sumar 3 565 634, con 325 676, con 34 780 y con 4 365.
5. Sumar 3452309, con 2389821, con 237623, con 239023 y con 125.
6. Sumar 3256, con 2782912, con 23903443 y con 239123.
7. Escribir el resultado de la suma anticipada para los números siguientes:
 - a) 23872
 - b) 12681
 - c) 89326
8. Escribir en forma clara, breve y correcta, preferentemente con tus propias palabras, lo que entiendes por **suma, sumando, igualdad, primer miembro, segundo miembro, regla del 9 y complemento a 9.**

2.5.7) PROPIEDADES DE LA SUMA

La suma tiene algunas propiedades útiles e interesantes. Para escribir dichas propiedades, utilizaremos las letras a, b, c y d para representar cuatro números cualesquiera.

Propiedad Conmutativa: La suma no se altera si se cambia el orden de los sumandos.

Esto es, $a + b = b + a$

Por ejemplo, $5 + 3 = 3 + 5 = 8$
 $14 + 8 = 8 + 14 = 22$

Propiedad Asociativa: Si en una suma de varios sumandos, dos o más de ellos se sustituyen por su suma efectuada, la suma no se altera.

Esto es, $a + b + c = a + (b + c) = (a + b) + c$

Por ejemplo, $5 + 4 + 7 = 5 + (4 + 7) = (5 + 4) + 7$
 O sea, $16 = 5 + 11 = 9 + 7$

Los paréntesis indican que lo que está dentro de ellos, debe realizarse primero. En lugar de paréntesis (), en ocasiones se utilizan corchetes [], o llaves { }, para realizar la misma función de agrupación o asociación.

Propiedad Disociativa: Si en una suma, se sustituye uno de los sumandos por otros sumandos, cuya suma sea precisamente el sumando a sustituir, la suma no se altera.

Esto es, si $a + b = c$, entonces c puede sustituirse por $a + b$.
 Por lo tanto la suma $a + b + d = (a + b) + d = c + d$, ya que $a + b = c$.

Por ejemplo, $15 + 3 = 10 + 5 + 3 = 18$. En este caso 15 se sustituye por $10 + 5$.

Otro ejemplo, $18 + 12 + 14 = 44$. Descomponiendo cada sumando en dos sumandos equivalentes, queda:

$$\begin{aligned}(10 + 8) + (10 + 2) + (10 + 4) &= 44 \\ 10 + 10 + 10 + 8 + 2 + 4 &= 44 \\ 30 + 10 + 4 &= 44 \\ 44 &= 44\end{aligned}$$

2.5.8) CASOS PARTICULARES DE LA SUMA

Sumando Unitario. Cuando todos los sumandos son 1, la suma es igual al número de sumandos.

Por ejemplo:

$1 + 1 = 2$	2 sumandos
$1 + 1 + 1 = 3$	3 sumandos
$1 + 1 + 1 + 1 = 4$	4 sumandos
$1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$	5 sumandos

Un caso útil e interesante es cuando sumamos números concretos de la misma especie.

Por ejemplo:

$$1 \text{ lápiz} + 1 \text{ lápiz} + 1 \text{ lápiz} + 1 \text{ lápiz} = 4 \text{ lápices}$$

$$1 \text{ perfume} + 1 \text{ perfume} + 1 \text{ perfume} = 3 \text{ perfumes}$$

Sumando Nulo. Si a un sumando cualquiera le sumamos un sumando nulo (cero), la suma no se altera.

$$\text{Esto es, } a + 0 = a.$$

$$\text{Por ejemplo, } 5 + 0 = 5, \quad 6 + 0 = 6.$$

El 0 es el único sumando que sumado con otro da como resultado el sumando, es decir, no altera la suma, por esa razón, al 0 se le conoce como **módulo de la suma**.

Sumandos Iguales. Si todos los sumandos en una suma son iguales, entonces la suma es igual al número de sumandos multiplicado por el sumando que se repite. Esto es:

$$a + a + a + a = 4 \times a \text{ y en general, } a + a + a + a + a + \dots + a_{n \text{ veces}} = n \times a$$

Por ejemplo,

$$5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 6 \times 5 = 30$$

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12$$

$$a + a + a + a + a = 5a$$

$$ab + ab + ab + ab = 4 ab$$

$$x + x + x + y + y = 3x + 2y$$

A continuación te doy la Tabla de Sumar, la cual debes aprender bien, si quieres ser veloz y preciso, dos características fundamentales de todo buen matemático. Para usarla, tienes que elegir un número en las filas (horizontales), por ejemplo 7 y después un número en las columnas (verticales), por ejemplo 8, con esto estarías calculando la suma $7 + 8 = 8 + 7 = 15$.



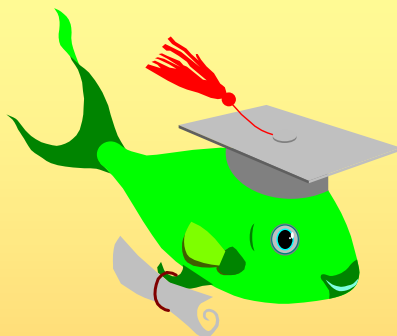


TABLA DE SUMAR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21
7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30

Por ejemplo, para hallar la suma de $12 + 13$, entra en la fila del 12 y en la columna del 13 y el valor que aparece en donde se interceptan es la suma pedida, que en este caso es 25.

UNIDAD III

2.6) SUMA DE NÚMEROS DECIMALES

Para sumar números con decimales, se alinean todos los sumandos basándose en el punto decimal, preferentemente agregando ceros para igualar el número de decimales en los sumandos y se procede de la misma forma que para sumar números enteros, colocando el punto decimal del resultado alineado con el de los sumandos.

Ejemplo: Sumar 234.798, con 23.49023, con 2356.2146 y con 0.96725

Solución: alineando los sumandos basándose en el punto decimal, completando con ceros los decimales de los sumandos y haciendo la suma, resulta:

REGLA DEL 9

2	3	4	.	7	9	8	0	0	$2 + 3 + 4 + 7 + 9 + 8 = 6$
	2	3	.	4	9	0	2	3	$2 + 3 + 4 + 9 + 2 + 3 = 5$
2	3	5	6	.	2	1	4	6	$2 + 3 + 5 + 6 + 2 + 1 + 4 + 6 = 2$
		0	.	9	6	7	2	5	$9 + 6 + 7 + 2 + 5 = 2$
2	6	1	5	.	4	7	0	0	8

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

Para los sumandos su regla del 9 es: $6 + 5 + 2 + 2 = 15 = 1 + 5 = 6$

Para el resultado o suma, su regla del 9 es: $2 + 6 + 1 + 5 + 4 + 7 + 8 = 33 = 3 + 3 = 6$. Ambos valores coinciden, por lo que se concluye que la suma es correcta.

Ejemplo: Sumar 78319.24, con 21235, con 5.87239, con 7237.6234 y con 12145.25256

Solución: alineando los sumandos basándose en el punto decimal, completando con ceros los decimales de los sumandos y haciendo la suma, resulta:

REGLA DEL 9

7	8	3	1	9	.	2	4	0	0	0	$7 + 8 + 3 + 1 + 9 + 2 + 4 =$
2	1	2	3	5	.	0	0	0	0	0	7
				5	.	8	7	2	3	9	$2 + 1 + 2 + 3 + 5 =$
											4
											$5 + 8 + 7 + 2 + 3 + 9 =$
											7
											$7 + 2 + 3 + 7 + 6 + 2 + 3 + 4 =$
											7
											$1 + 2 + 1 + 4 + 5 + 2 + 5 +$
											$2 + 5 + 6 =$
											6
1	1	8	9	4	2	.	9	8	8	3	5

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

Para los sumandos su regla del 9 es: $7 + 4 + 7 + 7 + 6 = 31 = 3 + 1 = 4$

Para el resultado o suma, su regla del 9 es: $1 + 1 + 8 + 9 + 4 + 2 + 9 + 8 + 8 + 3 + 5 = 58 = 5 + 8 = 13 = 1 + 3 = 4$. Ambos resultados coinciden, por lo que se concluye que la suma es correcta.

**Ejercicio 3**

Realiza lo que se te pide y comprueba cada suma con la regla del 9 antes de ver la solución.

1. Sumar 23.25, con 45.68, con 87 y con 7.238
2. Sumar 349.755, con 276.22, con 0.235 y con 37.256
3. Sumar 2 712.234, con 21.3256, con 189. 0239 y con 762.238
4. Sumar 4 356.2376, con 362.372, con 276 356 y con 361.34675
5. Sumar 347 329.023, con 2376.7623, con 0.237221 y con 12.23656
6. Sumar 266 712.23, con 21.362367, con 12 789. 98823 y con 1 862.237
7. Sumar 2 378.3256, con 345.678, con 23 783 y con 7.23458

UNIDAD IV

2.7) RESTA DE NÚMEROS ENTEROS

A la resta también se le llama **Substracción o Diferencia**. Se define como la operación que tiene por objeto, dado un número llamado **minuendo** y otro número llamado **sustraendo**, hallar la **resta, exceso o diferencia**.

Se representa por: Resta = minuendo – sustraendo. El signo de la resta es “-” que se lee “menos”. El minuendo y el sustraendo son los términos de la resta. Podemos decir que **término** es todo número separado por los signos + o -. Los que están precedidos de + se les llama términos positivos y los que van precedidos del - se les llama términos negativos.

2.7.1) REGLA PARA RESTAR NÚMEROS ENTEROS

Se escribe el sustraendo (número menor) debajo del minuendo (número mayor) y alineados ambos por la columna de las unidades. Después, comenzando por la derecha, se efectúa la diferencia de las cifras del mismo orden, escribiendo el resultado debajo de cada columna. Cuando la cifra del minuendo es menor que la correspondiente del sustraendo, se le agrega 10, con el objeto de hacer posible la operación; pero teniendo cuidado de acarrear una unidad a la columna siguiente del sustraendo.

Ejemplo: De 389 734 restar 327 628

3	8	9	7	3	4	Minuendo	
-	3	2	7	6	2	8	Sustraendo
				1		Acarreos	
				6		Resta	

Se restan las unidades $4 - 8$, como el sustraendo es mayor, le sumamos 10 al minuendo y decimos $14 - 8 = 6$ y llevamos 1 en el sustraendo.

Se restan las decenas, $3 - (2 + 1 \text{ acarreo}) = 3 - 3 = 0$ y no llevamos nada.

$$\begin{array}{r}
 389734 \\
 - 327628 \\
 \hline
 1 \\
 06
 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
Acarreos
Resta

Restando las centenas, $7 - 6 = 1$ y no se lleva nada.

$$\begin{array}{r}
 389734 \\
 - 327628 \\
 \hline
 1 \\
 106
 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
Acarreos
Resta

Continuando con los millares, $9 - 7 = 2$ y no se lleva nada.

$$\begin{array}{r}
 389734 \\
 - 327628 \\
 \hline
 1 \\
 2106
 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
Acarreos
Resta

Restando las decenas de millar, $8 - 2 = 6$ y no se lleva nada.

$$\begin{array}{r}
 389734 \\
 - 327628 \\
 \hline
 1 \\
 62106
 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
Acarreos
Resta

Por ultimo, restando las centenas de millar, $3 - 3 = 0$.

Finalmente:

$$\begin{array}{r}
 3 \ 8 \ 9 \ 7 \ 3 \ 4 \\
 - \ 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 2 \ 8 \\
 \hline
 0 \ 6 \ 2 \ 1 \ 0 \ 6
 \end{array}$$

Minuendo
Sustraendo
1
Acarreos
Resta

Para comprobar la resta sumamos el sustraendo con la resta, debiéndonos resultar igual al minuendo. Es decir, Minuendo = Resta + Sustraendo.

$$\begin{array}{r}
 0 \ 6 \ 2 \ 1 \ 0 \ 6 \\
 + \ 3 \ 2 \ 7 \ 6 \ 2 \ 8 \\
 \hline
 3 \ 8 \ 9 \ 7 \ 3 \ 4
 \end{array}$$

Resta
Sustraendo
Minuendo

Como el resultado salió igual al minuendo, significa que la resta es correcta.

2.7.2) COMPROBACION DE LA RESTA POR MEDIO DE LA REGLA DEL 9

Se aplica la regla del nueve al minuendo, sustraendo y a la resta. Después al resultado obtenido en la regla del 9 para el minuendo se le resta el valor obtenido para el sustraendo, el valor de esta operación debe coincidir con el valor obtenido al aplicarle la regla del 9 a la resta.

Es decir, La comprobación mediante la regla del 9, se aplica exactamente tal como se realiza la operación, o sea:

Regla del 9 del minuendo – regla del 9 del sustraendo = regla del 9 para la resta.

REGLA DEL 9

3	8	9	7	3	4		$3 + 8 + 9 + 7 + 3 + 4 = 34$	7
							$3 + 4 = 7$	
-	3	2	7	6	2	8	$3 + 2 + 7 + 6 + 2 + 8 = 28$	1
							$2 + 8 = 10 = 1 + 0 = 1$	
	0	6	2	1	0	6	6	Resta o Diferencia
								6

Comprobación: restando el resultado de la regla del 9 del minuendo y sustraendo,
 $7 - 1 = 6$.

Al aplicarle la regla del 9 a la resta, se obtiene $0 + 6 + 2 + 1 + 0 + 6 = 15$, o sea $1 + 5 = 6$.

En virtud de que ambos resultados de la regla del 9 son iguales, se concluye que la resta es correcta.

Ejemplo: De 8 923 467 restar 2 568 234

8	9	2	3	4	6	7	Minuendo	
-	2	5	6	8	2	3	4	Sustraendo
							Acarreos	
						3	Resta	

Se restan las unidades $7 - 4 = 3$ y no se lleva nada.

Se restan las decenas, $6 - 3 = 3$ y no llevamos nada.

8	9	2	3	4	6	7	Minuendo	
-	2	5	6	8	2	3	4	Sustraendo
							Acarreos	
						3	3	
						3	Resta	

Restando las centenas, $4 - 2 = 2$ y no llevamos nada.

8	9	2	3	4	6	7	Minuendo	
-	2	5	6	8	2	3	4	Sustraendo
							Acarreos	
						2	3	
						3	Resta	

Continuando con los millares, $3 - 8$, como el sustraendo es mayor, entonces al minuendo le sumamos 10 y ahora decimos $13 - 8 = 5$ y llevamos 1 en el sustraendo.

8	9	2	3	4	6	7	Minuendo	
-	2	5	6	8	2	3	4	Sustraendo
							Acarreos	
						1		
						5	2	
						3	3	
						3	Resta	

KUBAC

REGLA DEL 9

8	9	2	3	4	6	7		$8+9+2+3+4+6+7=39$	3
-	2	5	6	8	2	3	4	$3+9=12=1+2=3$	
								$2+5+6+8+2+3+4=30$	3
								$3+0=3$	
6	3	5	5	2	3	3	0	Resta o Diferencia	0

Comprobación: restando el resultado de la regla del 9 del minuendo y sustraendo,
 $3 - 3 = \mathbf{0}$.

Al aplicarle la regla del 9 a la resta, se obtiene $6 + 3 + 5 + 5 + 2 + 3 + 3 = 27$, o sea $2 + 7 = 9$, es decir, cuando la suma es 9 el residuo es **0**.

En virtud de que ambos resultados de la regla del 9 son iguales, se concluye que la resta es correcta.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

1) En una venta, la señorita Odelia, aprovechó una rebaja de precios y adquirió un vestido en \$ 205 pesos cuyo precio normal es de \$ 275 pesos, una blusa en \$ 140 pesos de un precio normal de \$ 165 pesos y una falda en \$ 108 pesos de un precio normal de \$ 125 pesos. ¿Cuánto fue la cantidad que se ahorró al comprar en la rebaja de precios?

Costo normal = \$ 275 pesos + \$ 165 pesos + \$ 125 pesos = \$ 565 pesos

Costo rebajado = \$ 205 pesos + \$ 140 pesos + \$ 108 pesos = \$ 453 pesos

Ahorro = Costo normal – Costo rebajado = \$ 565 pesos - \$ 453 pesos

Ahorro = **112 pesos**

2) Una pipa tiene un tanque con una capacidad de 10 000 litros, pero pierde 320 litros por cada viaje debido a una fisura en su tanque. El costo de la pipa por cada tanque lleno es de \$ 500 pesos. Si una persona le encarga 8 viajes y le descuenta los litros perdidos ¿Cuánto debe pagarle?

La pipa llena a toda su capacidad de 10 000 litros cuesta \$ 500 pesos, por lo que cada litro tiene un costo de:

Costo por litro = \$ 500 pesos /pipa / 10 000 litros /pipa = \$ 0.05 pesos

En 8 viajes se desperdician: $8 \text{ viajes} \times 320 \text{ litros} / \text{viaje} = 2\,560 \text{ litros}$

El descuento por litros perdidos es de: $2\,560 \text{ litros} \times \$ 0.05 \text{ pesos / litro} = \$ 128 \text{ pesos}$.

El costo total de 8 viajes es: $8 \text{ viajes} \times \$ 500 \text{ pesos / viaje} = \$ 4\,000 \text{ pesos}$.

Por lo que debe pagársele: Costo total - Descuento
 $= \$ 4\,000 \text{ pesos} - \$ 128 \text{ pesos} = \mathbf{\$ 3\,872 \text{ pesos}}$.

Ahora te voy a contar un truco matemático sensacional, el cual utilizo con mis alumnos cuando vemos el tema de resta y sirve para darme cuenta si saben restar o no. Le llamo ADIVINAR EL NÚMERO TACHADO.

2.7.3) ADIVINAR EL NÚMERO TACHADO

Se pide a alguien que escriba un número de 5 cifras (pueden ser cualquier número de cifras, pero se recomiendan 5 para que sea más fácil calcular el resultado). Que esta cifra la oculte a nuestra vista. Suponiendo que escribió 32 765, ahora de este número él tiene que sumar sus cifras, o sea:

$$3 + 2 + 7 + 6 + 5 = 23$$

Este resultado se lo tiene que restar a su cifra original, esto es:

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ - \quad \quad \quad 2 \quad 3 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 7 \quad 4 \quad 2 \end{array} \quad \text{Resultado}$$

De este resultado, le pides que tache una cifra la que él quiera, de los extremos, de los lados o la de en medio, la que sea. Tú sin error, le dirás la cifra que tachó, para lo cual él te tiene que decir únicamente las que no tachó.

Por ejemplo, suponiendo que tachó el 2 de las unidades, él te tiene que decir que no tachó el 3, el 2, el 7 y el 4. Aquí el orden en el que te dice las cifras no importa, ya que te las puede decir en cualquier orden, por ejemplo, el 4, el 2, el 3 y el 7.

$$\begin{array}{r} 3 \quad 2 \quad 7 \quad 6 \quad 5 \\ - \quad \quad \quad 2 \quad 3 \\ \hline 3 \quad 2 \quad 7 \quad 4 \quad \mathbf{2} \end{array} \quad \text{Cifra tachada}$$

Las cifras que el te dio las sumas, $3 + 2 + 7 + 4 = 16$ y buscas la diferencia con el múltiplo de 9 más cercano, en este caso 18 y ves cuanto te falta para llegar a este múltiplo, en este caso 2 y este será el número que tu le dirás que el tachó. Es increíble el truco por que tu jamás ves el número que escribió, la operación que

hizo ni el resultado de la resta, ni la cifra que tachó. Lo único que el te dice son las cifras que no tachó y lo puede hacer en cualquier orden. Claro que sino hace las operaciones correctamente el truco fallará por su culpa. Si falla, entonces me doy cuenta que no sabe restar.

Múltiplo de un número: es el producto de este número por un entero cualquiera. Por ejemplo, los números 9, 18, 27, 36, 45....., son múltiplos de 9, porque:

$$\begin{aligned} 9 &= 9 \times 1 \\ 18 &= 9 \times 2 \\ 27 &= 9 \times 3 \\ 36 &= 9 \times 4 \\ 45 &= 9 \times 5 \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Estos son los múltiplos que utilizarás para este truco matemático {9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72}

Otro ejemplo, suponiendo que escribió 67 834, ahora de este número él tiene que sumar sus cifras, o sea:

$$6 + 7 + 8 + 3 + 4 = 28$$

Este resultado se lo tiene que restar a su cifra original, esto es:

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 8 \quad 3 \quad 4 \\ - \quad \quad \quad 2 \quad 8 \\ \hline 6 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \quad 6 \end{array} \quad \text{Resultado}$$

De este resultado, le pides que tache una cifra la que él quiera, de los extremos, de los lados o la de en medio, la que sea. Tú sin error, le dirás la cifra que tachó, para lo cual él te tiene que decir únicamente las que no tachó.

Por ejemplo, suponiendo que tachó el 0, él te tiene que decir que no tachó el 6, el 7, el 8 y el 6. Aquí el orden en el que te dice las cifras no importa, ya que te las puede decir en cualquier orden, por ejemplo, el 8, el 7, el 6 y el 6.

$$\begin{array}{r} 6 \quad 7 \quad 8 \quad 3 \quad 4 \\ - \quad \quad \quad 2 \quad 8 \\ \hline 6 \quad 7 \quad 8 \quad 0 \quad 6 \end{array} \quad \text{Cifra Tachada}$$

Las cifras que el te dio las sumas, $6 + 7 + 8 + 6 = 27$ y buscas la diferencia con el múltiplo de 9 más cercano, en este caso 27 y ves cuanto te falta para llegar a este múltiplo, en este caso 0 y este será el número que tu le dirás que el tachó. En ocasiones, al sumar las cifras que no tachó dan como resultado un múltiplo de 9, pudiendo ser la respuesta 0 o 9, así que en este caso, primero le dices 0 y si te dice que no, entonces le dices 9.

Este truco no falla, siempre y cuando la otra persona haga bien la suma de las cifras y la resta respectiva. También, si tú sumas correctamente las cifras que no tachó y obtienes sin error la diferencia con el múltiplo de 9 más cercano. Cuando yo cuento este truco, se los hago a todos mis alumnos de un grupo. Les digo que si algo sale mal la culpa no será de la computadora sino del operador. Cuando la respuesta falla, es generalmente porque el alumno no sumó las cifras o no las restó correctamente.



Ejercicio 4.

Realiza lo que se te pide y comprueba cada resta con la regla del 9 antes de ver la solución al final del libro.

1. De 863 restar 362
2. De 3 676 restar 2 787
3. De 237 643 restar 43 908
4. De 487 467 restar 482 378
5. De 1 237 804 restar 458 794
6. De 784 325 restar 198 973
7. De 624 234 restar 419 987
8. De 7 357 321 restar 2 546 325
9. De 7 357 restar 2356
10. De 245 243 restar 32 762

UNIDAD V

2.8) RESTA DE NÚMEROS DECIMALES

Para restar números con decimales, se alinea el minuendo y el sustraendo por el punto decimal, preferentemente agregando ceros para igualar el número de decimales en los dos valores y se procede de la misma forma que para restar números enteros, colocando el punto decimal del resultado alineado con el del minuendo y sustraendo.

Ejemplo: De 127832.235 restar 23623.2767

REGLA DEL 9

$$\begin{array}{r}
 1 \ 2 \ 7 \ 8 \ 3 \ 2 \ . \ 2 \ 3 \ 5 \ 0 \\
 - \ 2 \ 3 \ 6 \ 2 \ 3 \ . \ 2 \ 7 \ 6 \ 7 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 4 \ 2 \ 0 \ 8 \ . \ 9 \ 5 \ 8 \ 3
 \end{array}$$

$$1+2+7+8+3+2+2+3+5=6$$

$$2+3+6+2+3+2+7+6+7=2$$

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

La regla del 9, del minuendo menos el sustraendo, resulta: $6 - 2 = 4$

Para el resultado o resta, su regla del 9 es: $1 + 4 + 2 + 8 + 9 + 5 + 8 + 3 = 40 = 4 + 0 = 4$. Ambos valores coinciden, por lo que se concluye que la resta es correcta.

Ejemplo: De 4356.239 restar 2389.82561

REGLA DEL 9

$$\begin{array}{r}
 4 \ 3 \ 5 \ 6 \ . \ 2 \ 3 \ 9 \ 0 \ 0 \\
 - \ 2 \ 3 \ 8 \ 9 \ . \ 8 \ 2 \ 5 \ 6 \ 1 \\
 \hline
 1 \ 9 \ 6 \ 6 \ . \ 4 \ 1 \ 3 \ 3 \ 9
 \end{array}$$

$$4+3+5+6+2+3+9=5$$

$$2+3+8+9+8+2+5+6+1=8$$

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

La regla del 9, del minuendo menos el sustraendo, resulta: $5 - 8 = -3$, **como salió negativo, hay que sumarle 9, resulta $-3 + 9 = 6$**

Para el resultado o resta, su regla del 9 es: $1 + 9 + 6 + 6 + 4 + 1 + 3 + 3 + 9 = 42 = 4 + 2 = 6$. Ambos valores coinciden, por lo que se concluye que la resta es correcta.



Ejercicio 5.

Realiza las restas siguientes y comprueba cada una de ellas con la regla del 9, antes de ver la solución al final del libro.

1. De 156.28 restar 39.89
2. De 589.396 restar 236.652
3. De 2 328.3674 restar 1 128.9825
4. De 38 125.435 restar 29 676.878
5. De 584 231.645 restar 412 846.1879

6. De 10 255.544 restar 9 825.71137
7. De 9 841 565.4754 restar 456 153.8973
8. De 928 235.25 restar 352 648.9287
9. De 93 733.227 restar 78 932.23762
10. De 272 238.2367 restar 197 236.245

Si resolviste correctamente todos los ejercicios anteriores, entonces significa que cada vez estás más cerca de la cumbre del éxito. ¡Vas ascendiendo muy bien! ¡Te felicito!



UNIDAD VI

2.9) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La multiplicación es la operación que tiene por objeto, dados dos números llamados factores, uno **multiplicando** y el otro **multiplicador**, hallar un tercer número llamado **producto**, que sea equivalente a la suma de tantos sumandos iguales al multiplicando como unidades contiene el multiplicador.

Cualquiera de los dos números considerados factores puede ser el multiplicando o el multiplicador. Pero para facilitar la multiplicación, consideraremos el multiplicando como el número que tiene más cifras y el multiplicador será el que tenga un número menor de cifras.

La multiplicación en aritmética se representa por “x” y se lee “multiplicado por”.

Por ejemplo, 5×7 , significa 5 multiplicado por 7, es decir, el 7 sumado 5 veces o bien el 5 sumado 7 veces.

Esto es:

$$5 \times 7 = 7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35. \text{ El 7 se sumó 5 veces}$$

$$7 \times 5 = 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35. \text{ El 5 se sumó 7 veces}$$

Gráficamente, se representa por:

1	2	3	4	5	6	7
2						
3						
4						
5						

El rectángulo representa el producto 5×7 ó 7×5 . Está formado por 5 filas (horizontales) de 7 cuadros cada una, o sea, $7 + 7 + 7 + 7 + 7 = 35$ cuadros. También, por 7 columnas (verticales) de 5 cuadros cada una, o sea, $5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 + 5 = 35$ cuadros.

Dos propiedades importantes posee la multiplicación:

Si uno de los factores es 0, el producto es también igual a cero

Esto es, $a \times 0 = 0$

Si uno de los factores es igual a 1, el producto es igual al otro factor.

Esto es, $a \times 1 = a$

2.9.1) REGLA GENERAL PARA MULTIPLICAR DOS NÚMEROS ENTEROS

Se escribe el multiplicando y debajo el multiplicador, alineados por la columna de las unidades. Se multiplica enseguida cada cifra del multiplicador por cada una de las cifras del multiplicando, considerando los acarreos que resulten, escribiendo cada producto parcial de modo que la primera cifra de la derecha quede alineada con la cifra del multiplicador que se emplea como factor. Finalmente se realiza la suma de los productos parciales, siendo este resultado el producto deseado.

Nota: Podemos empezar a multiplicar por la derecha o por la izquierda. Sólo debemos considerar que si empezamos por la derecha debemos recorrer los

productos una posición a la izquierda y, si empezamos por la izquierda podemos debemos recorrer los productos una posición a la derecha. Es decir, si multiplicas por un lado, recorres los productos en el otro sentido.

Por ejemplo, multiplicar $54\,373 \times 3\,278$

Solución, el multiplicando será $54\,373$ y el multiplicador será $3\,278$ por tener un menor número de cifras. Colocándolo tal como se muestra en la figura siguiente:

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 3\ 7\ 3\ \text{Multiplicando} \\ \times \quad 3\ 2\ 7\ 8\ \text{Multiplicador} \\ \hline \end{array}$$

Podemos empezar a multiplicar por la derecha, es decir, por el 8, por lo tanto recorreríamos los siguientes productos una posición a la izquierda. En este caso, es el método que utilizaremos.

Multiplicando 8 por cada una de las cifras del multiplicando, se tiene $8 \times 3 = 24$. Anotamos el 4 y nos llevamos el 2.

Luego $8 \times 7 = 56 + 2 \text{ acarreo} = 58$, anotamos 8 y nos llevamos 5.

Ahora $8 \times 3 = 24 + 5 \text{ acarreo} = 29$, anotamos 9 y nos llevamos 2.

Luego $8 \times 4 = 32 + 2 \text{ acarreo} = 34$, anotamos 4 y nos llevamos 3.

Al final $8 \times 5 = 40 + 3 \text{ acarreo} = 43$, anotamos 43 por que 5 es el último número del factor.

Queda:

$$\begin{array}{r} 5\ 4\ 3\ 7\ 3 \\ \times \quad 3\ 2\ 7\ 8 \\ \hline 4\ 3\ 4\ 9\ 8\ 4 \end{array}$$

Ahora multiplicando por 7, se tiene $7 \times 3 = 21$, anotamos el 1 recorriendo una posición a la izquierda, es decir, debajo del 8 del producto anterior y nos llevamos de acarreo el 2.

Luego multiplicamos $7 \times 7 = 49 + 2 \text{ acarreo} = 51$, anotamos 1 y llevamos 5.

Ahora se multiplica $7 \times 3 = 21 + 5$ acarreo = 26, anotamos 6 y llevamos 2.

Luego se multiplica $7 \times 4 = 28 + 2$ acarreo = 30, anotamos 0 y llevamos 3.

Al final multiplicamos $7 \times 5 = 35 + 3$ acarreo = 38, anotamos 38 por ser el último número del producto parcial.

Queda:

$$\begin{array}{r}
 5 4 3 7 3 \\
 x 3 2 7 8 \\
 \hline
 4 3 4 9 8 4 \\
 3 8 0 6 1 1
 \end{array}$$

Ahora multiplicando por 2, se tiene $2 \times 3 = 6$, anotamos 6 y no se lleva nada.

Luego multiplicamos $2 \times 7 = 14$, anotamos 4 y llevamos 1.

Ahora se multiplica $2 \times 3 = 6 + 1$ acarreo = 7, anotamos 7 y no llevamos nada.

Luego se multiplica $2 \times 4 = 8$, anotamos 8 y no llevamos nada.

Al final multiplicamos $2 \times 5 = 10$, anotamos el 10 por ser el último número del producto parcial.

Queda:

$$\begin{array}{r}
 5 4 3 7 3 \\
 x 3 2 7 8 \\
 \hline
 4 3 4 9 8 4 \\
 3 8 0 6 1 1 \\
 1 0 8 7 4 6
 \end{array}$$

Ahora multiplicando por 3, se tiene $3 \times 3 = 9$, anotamos 9 y no se lleva nada.

Luego multiplicamos $3 \times 7 = 21$, anotamos 1 y llevamos 2.

Ahora se multiplica $3 \times 3 = 9 + 2$ acarreo = 11, anotamos 1 y llevamos 1.

Luego se multiplica $3 \times 4 = 12 + 1 \text{ acarreo} = 13$, anotamos 3 y llevamos 1.

Al final multiplicamos $3 \times 5 = 15 + 1 \text{ acarreo} = 16$, anotamos 16 por ser el último número del producto parcial.

Como ya se multiplicaron todas las cifras del multiplicador por las del multiplicando, ahora realizamos la suma de todos los productos parciales para obtener el producto. Queda:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rcccccc}
 & & & 5 & 4 & 3 & 7 & 3 \\
 & & & X & & 3 & 2 & 7 & 8 \\
 \hline
 & & & 4 & 3 & 4 & 9 & 8 & 4 \\
 + & & & 3 & 8 & 0 & 6 & 1 & 1 \\
 & & 1 & 0 & 8 & 7 & 4 & 6 \\
 & 1 & 6 & 3 & 1 & 1 & 9 \\
 \hline
 1 & 7 & 8 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 4
 \end{array}
 \end{array}$$

En el caso de empezar a multiplicar por la izquierda, es decir, por el 3, recorremos los productos una posición a la derecha. Se obtiene el mismo resultado:

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{rcccccc}
 & & & 5 & 4 & 3 & 7 & 3 \\
 & & & X & & 3 & 2 & 7 & 8 \\
 \hline
 & & 1 & 6 & 3 & 1 & 1 & 9 \\
 & & & 1 & 0 & 8 & 7 & 4 & 6 \\
 + & & & 3 & 8 & 0 & 6 & 1 & 1 \\
 & & & & 4 & 3 & 4 & 9 & 8 & 4 \\
 \hline
 1 & 7 & 8 & 2 & 3 & 4 & 6 & 9 & 4
 \end{array}
 \end{array}$$

2.9.2) COMPROBACIÓN DE LA MULTIPLICACIÓN POR MEDIO DE LA REGLA DEL 9

Es decir, La comprobación mediante la regla del 9, se aplica exactamente tal como se realiza la operación, o sea:

REGLA DEL 9

[illegible]

Aplicando: Regla del 9 del multiplicando x regla del 9 del multiplicador = regla del 9 del producto.

En virtud de que coinciden ambos resultados, se concluye que la multiplicación es correcta.

Aplicando la regla para multiplicar dos números enteros, se obtiene el resultado mostrado en la figura:

	4	3	7	8	6
x		2	3	8	9
	3	9	4	0	7

COMPROBACIÓN MEDIANTE LA REGLA DEL 9.

$$43 \times 10\,000 = 430\,000$$

MULTIPLICACIÓN DE DOS NÚMEROS TERMINADOS EN CEROS

Se multiplican los números como si no tuvieran ceros y a la derecha de este producto se le añaden tantos ceros haya en el multiplicando y multiplicador.

Ejemplos:

$6\,500 \times 13\,000 = 84\,500\,000$. Multiplicando $65 \times 13 = 845$ más 5 ceros (2 del 65 y 3 del 13).

$42\,000 \times 370\,000 = 15\,540\,000\,000$. Multiplicando $42 \times 37 = 1\,554$ más 7 ceros (3 del 42 y 4 del 37).

2.9.4) PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN

Propiedad Conmutativa: La multiplicación no se altera si se cambia el orden de los factores.

Esto es, $a \times b = b \times a$

Por ejemplo, $5 \times 3 = 3 \times 5 = 15$

$$14 \times 8 = 8 \times 14 = 112$$

Propiedad Asociativa: Si en una multiplicación de varios factores, dos o más de ellos se sustituyen por su multiplicación efectuada, el producto no se altera.

Esto es, $a \times b \times c = a \times (b \times c) = (a \times b) \times c$

Por ejemplo, $5 \times 4 \times 7 = 5 \times (4 \times 7) = (5 \times 4) \times 7$
O sea, $140 = 5 \times 28 = 20 \times 7$

Los paréntesis indican que lo que está dentro de ellos, debe realizarse primero. En lugar de paréntesis (), en ocasiones se utilizan corchetes [], o llaves { }, para realizar la misma función de agrupación o asociación.

Propiedad Disociativa: Si en una multiplicación se sustituye uno de los factores por otros factores, cuyo producto sea precisamente el factor a sustituir, la multiplicación no se altera.

Esto es, si $a \times b = c$, entonces c puede sustituirse por $a \times b$.

Por lo tanto la multiplicación $a \times b \times d = (a \times b) \times d = c \times d$, ya que $a \times b = c$.

Por ejemplo, $15 \times 7 = 3 \times 5 \times 7 = 105$. En este caso 15 se sustituye por 3×5 .

Otro ejemplo, $18 \times 12 \times 14 = 3\,024$.

Descomponiendo cada factor en dos factores equivalentes, queda:

$$(9 \times 2) \times (6 \times 2) \times (7 \times 2) = 3\,024$$

$$9 \times 6 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 = 3\,024$$

$$54 \times 7 \times 2 \times 2 \times 2 = 3\,024$$

$$378 \times 2 \times 2 \times 2 = 3\,024$$

$$756 \times 2 \times 2 = 3\,024$$

$$1512 \times 2 = 3\,024$$

$$3\,024 = 3\,024$$

Propiedad Distributiva: El producto de un número por una suma indicada, es igual a la suma de los productos parciales obtenidos de multiplicar cada sumando por el factor.

Esto es, $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

Ejemplos:

a) $7 \times (3 + 4) = 7 \times 3 + 7 \times 4 = 21 + 28 = 49$

b) $5 \times (6 + 3 + 2) = 5 \times 6 + 5 \times 3 + 5 \times 2 = 30 + 15 + 10 = 55$

El producto de un número por una resta indicada, es igual a la diferencia de los productos parciales obtenidos de multiplicar el factor por los elementos de la resta.

Esto es, $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$

Ejemplos:

a) $8 \times (7 - 4) = 8 \times 7 - 8 \times 4 = 56 - 32 = 24$

b) $6 \times (8 - 5) = 6 \times 8 - 6 \times 5 = 48 - 30 = 18$

Propiedad: El número de cifras de un producto es igual a la suma de las cifras que tengan los factores considerados o igual a esa suma menos uno.

Esto es si el número de cifras del multiplicando es m y el número de cifras del multiplicador es n , entonces el producto tendrá un número de cifras de $m + n$ o de $m + n - 1$.

Por ejemplo, al multiplicar 6734×235 , esperamos un resultado de $4 + 3 = 7$ cifras ó de $7 - 1 = 6$ cifras. Para este caso el producto resulta ser igual a $1\,582\,490$, es decir, de 7 cifras.

Un método útil e interesante de multiplicación es LA MULTIPLICACIÓN BINARIA, la cual se sustenta en el sistema binario de numeración, que utiliza como base el número 2 y es el sistema fundamental para que funcionen las computadoras.

2.9.5) MULTIPLICACIÓN BINARIA

Consiste en ir duplicando el multiplicando y al mismo tiempo ir dividiendo por 2 el multiplicador, hasta llegar a 1. Como multiplicamos y dividimos por 2 al mismo tiempo, el producto no se altera. Para obtener el resultado, sumamos todos los números del multiplicando que tengan un número impar en la columna del multiplicador y esta suma será el producto deseado.

Cuando dividimos el multiplicador, no consideraremos los residuos. Por ejemplo, al dividir $65/2$, escribiremos 32 solamente.

Ejemplo: Multiplicar 73×27 . El multiplicando es 73 y el multiplicador es 27.

Multiplicando Se multiplica por 2	Multiplicador Se divide por 2	
73	27	Impar
146	13	Impar
292	6	
584	3	Impar
1168	1	Impar

Para obtener el resultado, sumamos los valores del multiplicando que corresponden a valores impares en el multiplicador, o sea:

$73 + 146 + 584 + 1168 = 1971$, que es la respuesta correcta.

Ejemplo: Multiplicar 675×86 . El multiplicando es 675 y el multiplicador es 86.

Multiplicando Se multiplica por 2	Multiplicador Se divide por 2	
675	86	
1350	43	Impar

2700	21	Impar
5400	10	
10800	5	Impar
21600	2	
43200	1	Impar

Para obtener el resultado, sumamos los valores del multiplicando que corresponden a valores impares en el multiplicador, o sea:

$1\ 350 + 2\ 700 + 10\ 800 + 43\ 200 = 58\ 050$, que es la respuesta correcta.

MÉTODO DE LUCCA PACCIOLI

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

1) Una impresora de matriz de puntos y controlada por una computadora, puede imprimir 650 líneas por minuto (lpm). ¿Cuántas líneas puede imprimir en 3 horas? Si una hoja tamaño carta contiene 60 líneas de impresión ¿Cuántas hojas imprimiría en 3 horas?

Solución: Como una hora tiene 60 minutos, en 3 horas = $60 \text{ minutos} / \text{hora} \times 3 \text{ horas} = 180 \text{ minutos}$.

Número de líneas impresas = $650 \text{ líneas} / \text{minuto} \times 180 \text{ minutos} = \mathbf{117\ 000 \text{ líneas}}$.

Número de hojas impresas = $117\ 000 \text{ líneas} / (60 \text{ líneas} / \text{hoja}) = \mathbf{1950 \text{ hojas}}$.

2) En una fabrica de muebles, el tiempo requerido para ensamblar una mesa es de 20 minutos y para una silla es de 30 minutos. Si un comedor se compone de 1 mesa y 4 sillas ¿Cuánto tiempo les llevará producir 15 comedores?

1 comedor = 1 mesa + 4 sillas

Tiempo para ensamblar un comedor = $20 \text{ minutos} + 4 (30 \text{ minutos})$
 $= 20 \text{ minutos} + 120 \text{ minutos} = 140 \text{ minutos}$
 por comedor.

Para ensamblar 15 comedores se requiere de un tiempo de:

$$= 15 \text{ comedores} \times 140 \text{ minutos} / \text{comedor} = \mathbf{2\ 100 \text{ minutos}}$$

Como una hora tiene 60 minutos, el tiempo en horas es de:

$$= 2100 \text{ minutos} / 60 \text{ minutos} / \text{hora} = \mathbf{35 \text{ horas.}}$$

3) A un Químico le toma 2 horas preparar una muestra para una prueba y 3 horas para analizarla. ¿Cuánto tiempo le llevará realizar 25 pruebas del mismo tipo?

Solución: Total de tiempo por prueba = tiempo de preparación + tiempo de análisis

$$= 2 \text{ horas} + 3 \text{ horas} = 5 \text{ horas}$$

En 25 pruebas del mismo tipo, tarda:

$$= 5 \text{ horas} / \text{prueba} \times 25 \text{ pruebas} = \mathbf{125 \text{ horas.}}$$

4) Un maestro aplica examen oral a un grupo y aplicarlo le toma 5 minutos cuando es un alumno y 4 minutos cuando es una alumna. Sabiendo que en el grupo hay 18 hombres y 24 mujeres ¿Cuántas horas le llevó aplicar el examen al grupo?

Total de tiempo en examen = 5 minutos/alumno $\times$ 18 alumnos + 4 minutos/alumna $\times$ 24 alumnas = 90 minutos + 96 minutos = 186 minutos.



Ejercicio 6.

Multiplicar los números enteros siguientes y comprobar los resultados con la regla del 9, antes de ver la solución.

1. 34 por 127
2. 342 por 265
3. 89 213 por 325
4. 47 053 por 8923
5. 34 125 por 1205

Utilizando la multiplicación binaria, multiplicar los números siguientes:

6. 128 por 37
7. 3 256 por 89
8. 9 032 por 235
9. 23 478 por 19
10. 477 por 353

11. Si se multiplicó 2 386 342 por 32 769, hallar el número que falta en el resultado 78 198 0 □ 0 998, sin hacer la operación. (Sugerencia: utilice la regla del 9).

A continuación te doy la Tabla de Multiplicar, a la cual también se le llama Tabla de Pitágoras. Debes aprenderla bien, si quieres ser veloz y preciso, dos características fundamentales de todo buen matemático. Si es muy importante aprenderte la tabla de sumar, aprender la de multiplicar es aun más importante. Para usarla, tienes que elegir un número en las filas (horizontales), por ejemplo 7 y después un número en las columnas (verticales), por ejemplo 8, con esto estarías calculando la multiplicación $7 \times 8 = 8 \times 7 = 56$.

TABLA DE MULTIPLICAR

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40	44	48	52	56	60
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70	75
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60	66	72	78	84	90
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70	77	84	91	98	105
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80	88	96	104	112	120
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117	126	135
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150
11	11	22	33	44	55	66	77	88	99	110	121	132	143	154	165
12	12	24	36	48	60	72	84	96	108	120	132	144	156	168	180
13	13	26	39	52	65	78	91	104	117	130	143	156	169	182	195
14	14	28	42	56	70	84	98	112	126	140	154	168	182	196	210
15	15	30	45	60	75	90	105	120	135	150	165	180	195	210	225

Por ejemplo, para hallar la multiplicación de 9×8 , entra en la fila del 9 y en la columna del 8 y el valor que aparece en donde se interceptan es el producto pedido, en este caso 72.

UNIDAD VII

2.10) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para multiplicar números con decimales, se procede de la misma forma que para multiplicar números enteros, como si no existiera punto decimal, pero debiendo colocar el punto decimal en el producto o resultado, recorriendo de **derecha a izquierda dicho punto**, un número de veces igual a la suma de las cifras decimales del multiplicando y del multiplicador.

Ejemplo: Multiplicar 28 903.245 por 235.98

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{ccccccccccc}
 & & 2 & 8 & 9 & 0 & 3 & . & 2 & 4 & 5 \\
 \times & & & & & & 2 & 3 & 5 & . & 9 & 8 \\
 \hline
 & & & & & & 2 & 3 & 1 & 2 & 2 & 5 & 9 & 6 & 0 \\
 + & & & & & & 2 & 6 & 0 & 1 & 2 & 9 & 2 & 0 & 5 \\
 & 1 & 4 & 4 & 5 & 1 & 6 & 2 & 2 & 5 & & & & & \\
 & 8 & 6 & 7 & 0 & 9 & 7 & 3 & 5 & & & & & & \\
 & 5 & 7 & 8 & 0 & 6 & 4 & 9 & 0 & & & & & & \\
 \hline
 6 & 8 & 2 & 0 & 5 & 8 & 7 & 7 & 5 & 5 & 1 & 0 & & &
 \end{array}
 \end{array}$$

En virtud de que el multiplicando tiene 3 decimales y el multiplicador 2, debemos recorrer el punto decimal de derecha a izquierda $3 + 2 = 5$ posiciones. Esto significa que el resultado final de la multiplicación es: **6 820 587.75510**.

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

Para los factores su regla del 9 da: **6** para el multiplicando y **0** para el multiplicador, es decir, $6 \times 0 = 0$.

Para el resultado o producto, su regla del 9 es: $6 + 8 + 2 + 5 + 8 + 7 + 7 + 5 + 5 + 1 = 54 = 5 + 4 = 9$, es decir, el residuo es **0**. Ambos valores coinciden, por lo que se concluye que la multiplicación es correcta.

Ejemplo: Multiplicar 327 685.35 por 348.8937

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cccccccccc}
 & & & & 3 & 2 & 7 & 6 & 8 & 5 & . & 3 & 5 \\
 & & & & \times & & 3 & 4 & 5 & . & 8 & 9 & 3 & 7 \\
 \hline
 & & & & 2 & 2 & 9 & 3 & 7 & 9 & 7 & 4 & 5 \\
 + & & & & 9 & 8 & 3 & 0 & 5 & 6 & 0 & 5 \\
 \\
 & & & 2 & 9 & 4 & 9 & 1 & 6 & 8 & 1 & 5 \\
 & & 2 & 6 & 2 & 1 & 4 & 8 & 2 & 8 & 0 \\
 & 1 & 6 & 3 & 8 & 4 & 2 & 6 & 7 & 5 \\
 1 & 3 & 1 & 0 & 7 & 4 & 1 & 4 & 0 \\
 9 & 8 & 3 & 0 & 5 & 6 & 0 & 5 \\
 \hline
 1 & 1 & 3 & 3 & 4 & 4 & 2 & 9 & 8 & 1 & 4 & 7 & 2 & 9 & 5
 \end{array}
 \end{array}$$

En virtud de que el multiplicando tiene 2 decimales y el multiplicador 4, debemos recorrer el punto decimal de derecha a izquierda: $2 + 4 = 6$ posiciones. Esto significa que el resultado final de la multiplicación es: **113 344 298.147295**.

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

Para los factores su regla del 9 da: **3** para el multiplicando y **3** para el multiplicador, es decir, $3 \times 3 = 9$, es decir, el residuo es **0**.

Para el resultado o producto, su regla del 9 es: $1 + 1 + 3 + 3 + 4 + 4 + 2 + 9 + 8 + 1 + 4 + 7 + 2 + 9 + 5 = 63 = 6 + 3 = 9$, es decir, el residuo es **0**. Ambos valores coinciden, por lo que se concluye que la multiplicación es correcta.



Ejercicio 7.

Multiplicar los números enteros siguientes y comprobar los resultados con la regla del 9, antes de ver la solución al final del libro.

1. Multiplicar 18.25 por 3.75
2. Multiplicar 125.648 por 22.739
3. Multiplicar 567.237 por 35.656
4. Multiplicar 2 761.27 por 32.78
5. Multiplicar 7 623.76 por 8.973
6. Multiplicar 0.363 por 20.2635
7. Multiplicar 0.03276 por 325.925
8. Multiplicar 2 367.325 por 0.2524
9. Multiplicar 22 623.24 por 0.0875
10. ¿Qué altura alcanzan 5000 hojas apiladas? Sí cada hoja tiene un espesor de 0.00635 centímetros.

UNIDAD VIII

2.11) DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS

La división es la operación que tiene por objeto, dados dos números, uno llamado **dividendo** y el otro **divisor**, hallar un tercer número llamado **cociente** que exprese el mayor número de veces que el divisor está contenido en el dividendo.

La división se representa por:

$b \overline{)a}$ se lee "a entre b", siendo a el dividendo y b el divisor

Otras formas de representar la división son :

1) $\frac{a}{b}$ y se lee "a entre b"

2) $a \div b$ y también se lee "a entre b"

En general, para representar la división se utiliza el símbolo llamado *galera*, el cual se muestra a continuación junto con los elementos de la división:

$$\begin{array}{r} \text{C} \\ d \overline{)D} \\ \text{R} \end{array}$$

Donde: **D** es el dividendo, **d** es el divisor, **C** el cociente y **R** el residuo.

Todos ellos están relacionados por la igualdad: **D = C x d + R** (D1)

Esto es, el dividendo es igual al producto del cociente por el divisor más el residuo.

Si el residuo es igual a cero, entonces se dice que la **división es exacta**.

Entonces de acuerdo a la igualdad anterior, la división es la operación que tiene por objeto dados el dividendo y el divisor, hallar el cociente y el residuo.

Una relación que siempre se debe cumplir es: **Residuo < divisor**

Esto significa que el residuo siempre debe ser menor que el divisor.

2.11.1) REGLA PARA DIVIDIR DOS NÚMEROS ENTEROS

Se toman tantas cifras del dividendo, a partir de la izquierda, como sean necesarias para que formen un número igual o mayor que el divisor y la división sea posible; se efectúa la división y se obtiene así la primera cifra del cociente. Esta cifra se escribirá exactamente arriba de la última cifra del primer dividendo parcial.

El primer número cociente será aquel que multiplicado por el divisor, dé un producto igual o menor que el dividendo parcial con el que se está trabajando; si no es igual, la diferencia que resulte debe ser menor que el divisor, a esta diferencia se le llama residuo y se escribe debajo de las cifras del dividendo parcial. El cociente parcial se multiplica por cada una de las cifras del divisor y se le restan al dividendo parcial, obteniéndose así un residuo, el cual siempre debe ser menor que el divisor.

Como el residuo (si lo hay) siempre es menor que el divisor, para continuar la división agregamos la siguiente cifra de la derecha del dividendo, bajándola para formar un número mayor que pueda contener al divisor y la división siga siendo posible.

Nuevamente repetimos el procedimiento hasta que no haya más cifras del dividendo que agregar o hasta que el residuo final sea menor que el divisor, escribiendo sucesivamente las nuevas cifras del cociente a la derecha de las anteriores. Cuando al agregar una cifra al dividendo parcial no se logra un valor mayor que el del divisor, entonces anotamos un 0 en el cociente y agregamos otra cifra más del dividendo para formar un nuevo dividendo parcial.

Ejemplo: Dividir 93 843 entre 29. El dividendo es 93 843 y el divisor es 29.

$$\begin{array}{r} 29 \overline{) 93843} \end{array}$$

Como el dividendo tiene dos cifras, tomamos dos cifras del dividendo, 93, para formar nuestro primer dividendo parcial. Nuestro primer cociente parcial será 3, puesto que $29 \times 3 = 87 < 93$.

Nuestro primer residuo será igual a la diferencia $93 - 87 = 6$. Este residuo también se obtiene multiplicando primero $3 \times 9 = 27$ para 33, **6** y llevamos 3. Ahora $3 \times 2 = 6 + 3$ acarreo = 9 y para 9, **0**.

Esto es,

$$\begin{array}{r} 3 \\ 29 \overline{) 93843} \\ \underline{- 87} \\ 06 \end{array}$$

Ahora bajamos el 8 y nuestro segundo dividendo parcial es 68.

O sea,

$$\begin{array}{r} 3 \\ 29 \overline{) 93843} \\ \underline{- 87} \\ 068 \end{array}$$

Nuestro segundo cociente será 2, puesto que $29 \times 2 = 58 < 68$. Nuestro segundo residuo será $68 - 58 = 10$. También se obtiene este residuo diciendo: $2 \times 9 = 18$, para 18, **0** y llevamos 1. Luego $2 \times 2 = 4 + 1$ acarreo = 5 y para 6, **1**.

Esto es:

$$\begin{array}{r} 32 \\ 29 \overline{) 93843} \\ \underline{87} \\ 068 \\ \underline{- 58} \\ 10 \end{array}$$

Ahora bajamos el 4 y nuestro tercer dividendo parcial es 104.

O sea,

$$\begin{array}{r}
 3 \ 2 \\
 2 \ 9 \overline{) 9 \ 3 \ 8 \ 4 \ 3} \\
 \underline{8 \ 7} \\
 0 \ 6 \ 8 \\
 - \quad 5 \ 8 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 4
 \end{array}$$

Nuestro tercer cociente será 3, puesto que $29 \times 3 = 87 < 104$ y no 4, ya que $29 \times 4 = 116 > 104$, es decir, se pasa. Nuestro tercer residuo será $104 - 87 = 17$.

También se obtiene este residuo diciendo: $3 \times 9 = 27$, para 34, **7** y llevamos 3. Luego $3 \times 2 = 6 + 3$ acarreo = 9 y para 10, **1**.

Esto es,

$$\begin{array}{r}
 3 \ 2 \ 3 \\
 2 \ 9 \overline{) 9 \ 3 \ 8 \ 4 \ 3} \\
 \underline{8 \ 7} \\
 0 \ 6 \ 8 \\
 - \quad 5 \ 8 \\
 \hline
 1 \ 0 \ 4 \\
 - \quad 8 \ 7 \\
 \hline
 1 \ 7
 \end{array}$$

Ahora bajamos el 3 y nuestro último dividendo parcial es 173.

O sea,

$$\begin{array}{r}
 3 \ 2 \ 3 \\
 2 \ 9 \overline{) 9 \ 3 \ 8 \ 4 \ 3} \\
 \underline{8 \ 7} \\
 0 \ 6 \ 8 \\
 - \quad 5 \ 8 \\
 \underline{ 1 \ 0 \ 4} \\
 - \quad \quad 8 \ 7 \\
 \underline{ 1 \ 7 \ 3}
 \end{array}$$

Nuestro último cociente será 5, puesto que $29 \times 5 = 145 < 173$ y no 6, ya que $29 \times 6 = 174 > 173$, es decir, se pasa. Nuestro último residuo será $173 - 145 = 28$.

También se obtiene este residuo diciendo: $5 \times 9 = 45$, para 53, **8** y llevamos 5. Luego $5 \times 2 = 10 + 5$ acarreo = 15 y para 17, **2**.

Esto es,

$$\begin{array}{r}
 3 \ 2 \ 3 \ 5 \\
 2 \ 9 \overline{) 9 \ 3 \ 8 \ 4 \ 3} \\
 \underline{8 \ 7} \\
 0 \ 6 \ 8 \\
 - \quad 5 \ 8 \\
 \underline{ 1 \ 0 \ 4} \\
 - \quad \quad 8 \ 7 \\
 \underline{ 1 \ 7 \ 3} \\
 - \quad \quad 1 \ 4 \ 5 \\
 \underline{ 2 \ 8}
 \end{array}$$

Como ya no hay más cifras del dividendo que agregar y el residuo es menor que el divisor, la división ha terminado y el cociente hallado es 3 235 y el residuo es de 28.

Regla del 9 para el cociente = $3 + 2 + 3 + 5 = 13 = 1 + 3 = 4$

Regla del 9 para el divisor = $2 + 9 = 11 = 1 + 1 = 2$

Regla del 9 para el residuo = $2 + 8 = 10 = 1 + 0 = 1$

Por lo tanto, $4 \times 2 + 1 = 8 + 1 = 9$

Regla del 9 para el dividendo = $9 + 3 + 8 + 4 + 3 = 27 = 7 + 2 = 9$. En virtud de que ambos resultados son iguales, se concluye que la división es correcta.

Ejemplo: Dividir 437 345 entre 897. El dividendo es 437 345 y el divisor es 897. Aplicando en forma compacta el procedimiento descrito anteriormente, se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 4 8 3 7 \\
 8 9 \overline{) 4 7 4 } \\
 - 3 5 8 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 \\

 \end{array}$$

Comprobando mediante la regla del 9, resulta:

Regla del 9 para el cociente = $4 + 8 + 7 = 19 = 1 + 9 = 10 = 1 + 0 = 1$

Regla del 9 para el divisor = $8 + 9 + 7 = 24 = 2 + 4 = 6$

Regla del 9 para el residuo = $5 + 0 + 6 = 11 = 1 + 1 = 2$

Por lo tanto, $1 \times 6 + 2 = 6 + 2 = 8$

Regla del 9 para el dividendo = $4 + 3 + 7 + 3 + 4 + 5 = 26 = 2 + 6 = 8$. En virtud de que ambos resultados son iguales, se concluye que la división es correcta.



Ejercicio 8.

Realizar las divisiones siguientes y comprobarlas con la regla del 9.

1. Dividir 128 entre 24
2. Dividir 3623 entre 635
3. Dividir 34 276 entre 4578
4. Dividir 347 889 entre 234
5. Dividir 897 623 entre 1 256
6. Dividir 7 823 978 entre 35 980
7. Dividir 8 353 347 entre 23 564

UNIDAD IX

2.11.4) CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Es muy útil conocer los criterios de divisibilidad, ya que nos permiten darnos cuenta sin realizar la división, si la operación resultará exacta o del valor que saldrá de residuo. Esto es muy importante, cuando dividimos o cuando descomponemos un número en sus factores primos, que se tratarán más adelante.

DIVISIBILIDAD POR 2

Un número es divisible por 2 cuando termina en 0 o en cifra par.

Los **números pares** son todos los números múltiplos de 2, tales como: 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, etc. Un número par puede representarse por **$2k$** , siendo k cualquier número entero. Por ejemplo si $k = 18$, entonces $2k = 2 \times 18 = 36$, que es un número par.

Los **números impares** son todos aquellos números que no son múltiplos de 2, tales como: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, etc. Un número impar puede representarse por **$2k + 1$** , siendo k cualquier número entero. Por ejemplo si $k = 18$, entonces $2k + 1 = 2 \times 18 + 1 = 37$, que es un número impar.

Ejemplos de números divisibles por 2:

- | | | |
|----|------|---------------------------------|
| a) | 1520 | porque termina en 0 |
| b) | 2554 | porque termina en cifra par (4) |

DIVISIBILIDAD POR 3

Un número es divisible por 3, cuando la suma de sus cifras es 3 o un múltiplo de 3.

Los múltiplos de 3 son: 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, etc. Se representan por **$3k$** , siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles por 3:

- a) 7 263 porque $7 + 2 + 6 + 3 = 18 = 1 + 8 = 9$, que es un múltiplo de 3.
 b) 8 112 porque $8 + 1 + 1 + 2 = 12 = 1 + 2 = 3$, es decir, sus cifras suman 3.

DIVISIBILIDAD POR 4

Un número es divisible entre 4, cuando las 2 últimas cifras son ceros o forman un número divisible por 4.

Los números que son divisibles por 4 son sus múltiplos, los cuales son: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, etc. Se representan por **4k**, siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles por 4:

- a) 7 500 porque termina con 2 ceros.
 b) 8 112 porque 12 es divisible entre 4.
 c) 787 600 porque termina con 2 ceros.
 d) 127 836 porque 36 es divisible entre 4.

DIVISIBILIDAD POR 5

Un número es divisible entre 5, cuando termina en 0 o en 5.

Ejemplos de números divisibles por 5:

- a) 7 560 porque termina en 0.
 b) 8 115 porque termina en 5.
 c) 787 600 porque termina en 0.
 d) 127 835 porque termina en 5.

DIVISIBILIDAD POR 6

Un número es divisible entre 6, cuando simultáneamente es divisible entre 2 y entre 3.

Esto se debe a que $6 = 2 \times 3$.

Ejemplos de números divisibles por 6:

- a) 7536 porque termina en cifra par se divide entre 2
 y porque es divisible entre 3, ya que $7 + 5 + 3 + 6 = 21 = 2 + 1 = 3$.
 b) 8 118 porque termina en cifra par se divide entre 2

y porque es divisible entre 3, ya que $8 + 1 + 1 + 8 = 18 = 1 + 8 = 9$.

DIVISIBILIDAD POR 7

Un número es divisible entre 7, cuando separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 2, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o un múltiplo de 7.

Los números que son divisibles por 7 son sus múltiplos, los cuales son: 7, 14, 21, 28, 35, 42, 49, 56, 63, etc. Se representan por **7k**, siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles por 7:

a) 2 975 Multiplicando la cifra de la derecha por 2, $5 \times 2 = 10$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $297 - 10 = 287$. De este resultado quitando el 7 y multiplicándolo por 2, $7 \times 2 = 14$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $28 - 14 = 14$. En virtud de que el resultado es un múltiplo de 7, se concluye que 2 975 es divisible por 7.

b) 2 058 Multiplicando la cifra de la derecha por 2, $8 \times 2 = 16$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $205 - 16 = 189$. De este resultado quitando el 9 y multiplicándolo por 2, $9 \times 2 = 18$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $18 - 18 = 0$. En virtud de que dio 0, se concluye que 2 058 es divisible por 7.

c) 1 015 Multiplicando la cifra de la derecha por 2, $5 \times 2 = 10$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $101 - 10 = 91$. De este resultado quitando el 1 y multiplicándolo por 2, $1 \times 2 = 2$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $9 - 2 = 7$. En virtud de que el resultado es un múltiplo de 7, se concluye que 1 015 es divisible por 7.

Observación: Si el producto de la primera cifra de la derecha no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

DIVISIBILIDAD POR 8

Un número es divisible entre 8, cuando las 3 últimas cifras son ceros o forman un número divisible por 8.

Ejemplos de números divisibles por 8:

a) 9 256 porque sus 3 últimas cifras 256, son divisibles entre 8.

b) 453 000 porque termina en 3 ceros.

DIVISIBILIDAD POR 9

Un número es divisible por 9, cuando la suma de sus cifras es 9 o un múltiplo de 9.

Los múltiplos de 9 son: 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, etc. Se representan por **9k**, siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles por 9:

a) 7 263 Debido a que la suma de sus cifras: $7 + 2 + 6 + 3 = 18 = 1 + 8 = 9$, en virtud de que suma 9, entonces 7 263 es divisible entre 9.

b) 638 793 Debido a que la suma de sus cifras: $6 + 3 + 8 + 7 + 9 + 3 = 36 = 3 + 6 = 9$, en virtud de que suma 9, entonces 638 793 es divisible entre 9.

DIVISIBILIDAD POR 10

Un número es divisible entre 10, cuando termina en 0.

Ejemplos de números divisibles por 10:

a) 7 560 porque termina en 0.

b) 899 600 porque termina en 0.

DIVISIBILIDAD POR 11

Un número es divisible entre 11, cuando la diferencia entre la suma de los valores absolutos de sus cifras en la posición impar y la suma de los valores absolutos de sus cifras en la posición par, de derecha a izquierda, es 0 o un múltiplo de 11.

Los números que son divisibles por 11 son sus múltiplos, los cuales son: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, etc. Se representan por **11k**, siendo k cualquier número entero.

Observación: Si el producto de la primera cifra de la derecha no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

Ejemplos de números divisibles por 11:

a) 562 683 Sumando las cifras que están en posición impar $3 + 6 + 6 = 15$. Ahora, sumando las cifras que están en posición par: $8 + 2 + 5 = 15$. En virtud de que la diferencia es $15 - 15 = 0$, se concluye que 562 693 es divisible por 11.

b) 3 083 058 Sumando las cifras que están en posición impar $8 + 0 + 8 + 3 = 19$. Ahora, sumando las cifras que están en posición par: $5 + 3 + 0 = 8$. En virtud de que la diferencia es $19 - 8 = 11$, se concluye que 3 083 058 es divisible por 11.

DIVISIBILIDAD POR 12

Un número es divisible entre 12, cuando simultáneamente es divisible entre 3 y entre 4.

Esto se debe a que $12 = 3 \times 4$.

Ejemplo de un número divisible por 12:

- a) 1980 porque se divide entre 3 y entre 4.
b) 144 porque se divide entre 3 y entre 4.

DIVISIBILIDAD POR 13

Un número es divisible entre 13, cuando separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 9, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o un múltiplo de 13.

Los números que son divisibles por 13 son sus múltiplos, los cuales son: 13, 26, 39, 52, 65, 78, 91, 104, 117, etc. Se representan por **13k**, siendo k cualquier número entero.

Observación: Si el producto de la primera cifra de la derecha no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

Ejemplos de números divisibles por 13:

a) 3 042 Multiplicando la cifra de la derecha por 9, $2 \times 9 = 18$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $304 - 18 = 286$. De este resultado quitando el 6 y multiplicándolo por 9, $6 \times 9 = 54$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $28 - 54 = -26$. En virtud de que el resultado es negativo, es necesario invertir los términos de la resta, o sea, $54 - 28 = 26$, que es un múltiplo de 13, se concluye que 3 042 es divisible por 13.

b) 118 105 Multiplicando la cifra de la derecha por 9, $5 \times 9 = 45$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $11\ 810 - 45 = 11\ 765$. De este resultado quitando el 5 y multiplicándolo por 9, $5 \times 9 = 45$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $1176 - 45 = 1\ 131$. De este resultado quitando el 1 y multiplicándolo por 9, $1 \times 9 = 9$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $113 - 9 = 104$. En virtud de que el resultado es un múltiplo de 13, se concluye que 118 105 es divisible por 13.

DIVISIBILIDAD POR 14

Un número es divisible entre 14, cuando simultáneamente es divisible entre 2 y entre 7.

Esto se debe a que $14 = 2 \times 7$.

Ejemplo de un número divisible por 14:

- a) 11 858 porque se divide entre 2 y entre 7.
 a) 2 478 porque se divide entre 2 y entre 7.

DIVISIBILIDAD POR 15

Un número es divisible entre 15, cuando simultáneamente es divisible entre 3 y entre 5.

Esto se debe a que $15 = 3 \times 5$.

Ejemplo de un número divisible por 15:

- a) 53 190 porque se divide entre 3 y entre 5.

DIVISIBILIDAD POR 16

Un número es divisible entre 16, cuando simultáneamente es divisible entre 2 y entre 8.

Esto se debe a que $16 = 2 \times 8$.

Ejemplo de un número divisible por 16:

- a) 75 920 porque se divide entre 2 y entre 8.

DIVISIBILIDAD POR 17

Un número es divisible entre 17, cuando separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 5, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o un múltiplo de 17.

Los números que son divisibles por 17 son sus múltiplos, los cuales son: 17, 34, 51, 68, 85, 102, 119, 136, 153, etc. Se representan por **17k**, siendo k cualquier número entero.

Observación: Si el producto de la primera cifra de la derecha no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

Ejemplo de un número divisible por 17:

a) 9 588 Multiplicando la cifra de la derecha por 5, $8 \times 5 = 40$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $958 - 40 = 918$. De este resultado quitando el 8 y multiplicándolo por 5, $5 \times 8 = 40$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $91 - 40 = 51$. En virtud de que el resultado es un múltiplo de 17, se concluye que 9 588 es divisible por 17.

DIVISIBILIDAD POR 19

Un número es divisible entre 19, cuando separando la primera cifra de la derecha y multiplicándola por 17, restando este producto de lo que queda a la izquierda y así sucesivamente, da 0 o un múltiplo de 19.

Los números que son divisibles por 19 son sus múltiplos, los cuales son: 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, etc. Se representan por **19k**, siendo k cualquier número entero.

Observación: Si el producto de la primera cifra de la derecha no se puede restar de lo que queda a la izquierda, se invierten los términos de la resta.

Ejemplo de un número divisible por 19:

a) 10 678 Multiplicando la cifra de la derecha por 17, $8 \times 17 = 136$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $1\ 067 - 136 = 931$. De este resultado quitando el 1 y multiplicándolo por 17, $1 \times 17 = 17$, restando a lo que queda a la izquierda, o sea, $93 - 17 = 76$. En virtud de que el resultado es un múltiplo de 19, se concluye que 10 678 es divisible por 19.

DIVISIBILIDAD POR 25

Un número es divisible entre 25, cuando sus 2 últimas cifras de la derecha son 00 o un múltiplo de 25.

Los números que son divisibles por 25 son sus múltiplos, los cuales son: 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, etc. Se representan por **25k**, siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles entre 25.

- a) 10 700 Porque termina en 00.
- b) 65 325 Porque sus 2 últimas cifras (25) son un múltiplo de 25.

DIVISIBILIDAD POR 125

Un número es divisible entre 125, cuando sus 3 últimas cifras de la derecha son 000 o un múltiplo de 125.

Los números que son divisibles por 125 son sus múltiplos, los cuales son: 125, 250, 375, 500, 625, 750, 875, 1 000, 1 125, etc. Se representan por **125k**, siendo k cualquier número entero.

Ejemplos de números divisibles entre 125.

- a) 6 546 000 Porque termina en 000.
- b) 65 625 Porque sus 3 últimas cifras (625) son un múltiplo de 125.

Con los criterios de divisibilidad anteriormente expuestos, es posible darnos cuenta si el número dado es divisible entre algún número cuyo criterio se conoce. Esto lo utilizo para un truco matemático que le denomino DIVIDIR CON LA VISTA.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

1) El grupo de boy scouts era de 39 elementos. Después, 15 muchachos más se unieron al grupo. El líder del grupo decidió dividirlos en 4 escuadrones. ¿Cuántos elementos quedaron en cada escuadrón?

Total de elementos = 39 iniciales + 15 nuevos = 44 elementos

Número de elementos por escuadrón = total de elementos / No. de escuadrones
 = 44 elementos / 4 escuadrones
 = **11 elementos / escuadrón**

2) Un contratista usa una camioneta de 3 toneladas para mover 20 toneladas de arena. Si la camioneta estuvo totalmente llena en cada viaje excepto en el último. ¿Cuántos viajes hizo? ¿Cuál fue el peso de la última carga?

Solución:

Número de viajes llenos = 20 Ton / 3 Ton / viaje = **6 viajes** y sobran 2 toneladas.

En el último viaje su carga fue de 2 toneladas.



Ejercicio 9

Aplicando los criterios de divisibilidad, por simple inspección diga:

- a) Si 4367 es divisible entre 7

- b) Si 41 602 es divisible entre 11
- c) Si 22 467 762 es divisible entre 3 y entre 9
- d) Si 23766723 es divisible entre 13
- e) Si 23564512 es divisible entre 12
- f) Si 31 675 232 238 es divisible entre 6.
- g) Si 3 267 652 300 es divisible entre 4, 8, 15, 16, y 25



UNIDAD X

2.12) DIVISIÓN DE NÚMEROS DECIMALES

Para dividir números con decimales, se procede de la misma forma que para dividir números enteros, pero debiendo quitar el punto decimal en el divisor, para lo cual lo recorremos el punto decimal a la derecha, tanto en el divisor como en el dividendo un mismo número de posiciones, de manera tal que el divisor quede como número entero. Después, procedemos a realizar la división normalmente, debiendo colocar el punto decimal en el cociente al momento en que bajemos la primera cifra decimal del dividendo.



Nota: En ocasiones, para completar el recorrido del punto decimal en el dividendo, es necesario añadir ceros.

Ejemplo: Dividir 186 210.85397 entre 4 685.452

El divisor es 4 685. 452, necesitamos recorrer el punto decimal 3 posiciones a la derecha para que el divisor quede como un número entero. Queda: 4 685 452. También, en el dividendo debemos recorrer el punto decimal 3 posiciones a la derecha. Se obtiene: 186 210 853.97

Ahora, realizando la división normalmente. Se tiene:

$$\begin{array}{r}
 4685452 \overline{) 186210853.97} \\
 \underline{- 14056356} \\
 045647293 \\
 \underline{- 42169068} \\
 034782259 \\
 \underline{- 32798164} \\
 019840957 \\
 \underline{18741808} \\
 01099149
 \end{array}$$

Comprobación, aun con decimales la regla del 9 se aplica perfectamente, como si no existiera el punto decimal.

Regla del 9 para el cociente = $3 + 9 + 7 + 4 = 23 = 2 + 3 = 5$

Regla del 9 para el divisor = $4 + 6 + 8 + 5 + 4 + 5 + 2 = 34 = 3 + 4 = 7$

Regla del 9 para el residuo = $1 + 0 + 9 + 9 + 1 + 4 + 9 = 33 = 3 + 3 = 6$

Aplicando: Regla del 9 del cociente $\times$ regla del 9 del divisor + regla del 9 del residuo = regla del 9 del dividendo.

Para la división anterior se tiene: $5 \times 7 + 6 = 35 + 6 = 41 = 4 + 1 = 5$

Regla del 9 para el dividendo = $1 + 8 + 6 + 2 + 1 + 0 + 8 + 5 + 3 + 9 + 7 = 50 = 5 + 0 = 5$. En virtud de que ambos resultados son iguales, se concluye que la división es correcta.

Ejemplo: Dividir 0.05645315349 entre 0.000867755

El divisor es 0.000867755, necesitamos recorrer el punto decimal 9 posiciones a la derecha para que el divisor quede como un número entero. Queda: 867 755. También, en el dividendo debemos recorrer el punto decimal 9 posiciones a la derecha. Se obtiene: 56 453 153.49

Ahora, realizando la división normalmente. Se tiene:

Resolver los problemas siguientes:

8. Una maquina equipada con un láser basado en gas es usada para perforar una placa de acero de 2.50 metros de espesor. Si en cada etapa sólo puede perforar 0.0125 metros (1.250 centímetros) ¿Cuántas etapas es necesario realizar para perforar toda la placa?
9. Un pase de taxi de Acapulco a Puerto Marqués cuesta \$ 12.50 pesos. Si a un grupo de turistas les cobraron \$ 162.50 pesos ¿Cuántas personas formaban el grupo?
10. Sabiendo que la paca de lámina negra pesa 8 kilogramos y cuesta a razón de \$ 9.75 el kilogramo. ¿Cuántas pacas de lámina negra se compraron si se pagó un total de \$ 7332.00 pesos?

UNIDAD XI**2.13) POTENCIACIÓN**

Es una operación que tiene por objeto hallar el producto de las potencias de un número.

Potencia: es el resultado de tomar un número como factor un determinado número de veces. Cuando en un producto todos los factores se repiten, al producto o resultado se le llama POTENCIA. Así, 625 es la cuarta potencia de 5, puesto que:

$$625 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4$$

Al número que se multiplica por si mismo se le llama base de la potencia. Al número pequeño y en la parte superior derecha de la base se le llama exponente, que indica el número de veces que la base se multiplica por sí misma. Por esta razón, también se le llama **exponenciación** a la potenciación.

Por ejemplo:

$3^6 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 729$	(6 veces)
$6^3 = 6 \times 6 \times 6 = 216$	(3 veces)
$2^{10} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 1024$	(10 veces)
$8^4 = 8 \times 8 \times 8 \times 8 = 4\,096$	(4 veces)
$31^2 = 31 \times 31 = 961$	(2 veces)
$2^5 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$	(5 veces)
$5^2 = 5 \times 5 = 25$	(2 veces)

En realidad, la potenciación es una multiplicación abreviada cuando el mismo factor se repite varias veces. Por ejemplo, si el factor 5 se repitiera 12 veces, sería muy tardado y tedioso escribir, $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5$, es mejor escribir 5^{12} , que de todos modos significa y vale lo mismo.

Ejemplo: escribir como potencia $5 \times 5 \times 5 \times 6 \times 6 \times 6 \times 6$

Como el 5 se repite 3 veces y el 6 se repite 4 veces, queda: $5^3 \times 6^4$
 $= 125 \times 1296 = 16\ 200$

Ejemplo: calcular el valor de las expresiones siguientes:

$$4^3 \times 3^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 64 \times 81 = 5\ 184$$

$$2^7 \times 5^3 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 5 \times 5 = 128 \times 125 = 16\ 000$$

$$7^4 \times 8^2 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 8 \times 8 = 2\ 401 \times 64 = 153\ 664$$

$$4^2 \times 3^4 \times 2^3 = 4 \times 4 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 2 \times 2 \times 2 = 16 \times 243 \times 8 = 31\ 104$$

$$(0.25)^3 = 0.25 \times 0.25 \times 0.25 = 0.015625$$

$$(0.73)^4 = 0.73 \times 0.73 \times 0.73 \times 0.73 = 0.28398241$$

$$(0.1)^5 = 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 \times 0.1 = 0.00001$$

Propiedad: Para multiplicar dos potencias de la misma base, sus exponentes se suman.

$$\text{Esto es: } a^m \times a^n = a^{m+n}$$

Ejemplos:

$$2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

$$5^2 \times 5 = 5^{2+1} = 5^3 = 125$$

$$4^3 \times 4^2 \times 4^4 = 4^{3+2+4} = 4^9 = 262\ 144$$

$$3^2 \times 3^6 = 3^{2+6} = 3^8 = 6\ 561$$

$$10^2 \times 10^6 \times 10^3 = 10^{2+6+3} = 10^{11} = 100\ 000\ 000\ 000$$

Note que al elevar el 10 a una potencia x , quedará como resultado la unidad seguida de x ceros. Por ejemplo, $10^7 = 10\ 000\ 000$, es decir, un 1 seguido de 7 ceros. Esto se utiliza mucho en el tema de notación científica que trataremos más adelante.

Propiedad: Para dividir dos potencias de la misma base, al exponente del numerador le restamos el exponente del denominador.

$$\text{Esto es: } a^m / a^n = a^{m-n}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{4^5}{4^2} = 4^{5-2} = 4^3 = 64 \\
 2) \quad & \frac{9^6}{9^4} = 9^{6-4} = 9^2 = 81 \\
 3) \quad & \frac{15^9}{15^6} = 15^{9-6} = 15^3 = 3\,375 \\
 4) \quad & \frac{2^{20}}{2^{13}} = 2^{20-13} = 2^7 = 128 \\
 5) \quad & \frac{7^{14}}{7^{10}} = 7^{14-10} = 7^4 = 2\,401
 \end{aligned}$$

Toda cantidad dividida entre si misma es igual a la unidad, así, $25 / 25 = 1$. También, $5^2 / 5^2 = 1$, por lo tanto $5^{2-2} = 1$, esto es, $5^0 = 1$.

En general, se tiene: $a^m / a^m = 1$, es decir, $a^{m-m} = 1$ y por lo tanto $a^0 = 1$.

Concluimos, que toda cantidad elevada a la cero potencia, es igual a la unidad, siempre que la base sea diferente de cero.

Regla: Para elevar una potencia a otra potencia, basta multiplicar los exponentes.

Esto es: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 (2^4)^3 &= 2^{4 \times 3} = 2^{12} = 4096 \\
 (3^5)^2 &= 3^{5 \times 2} = 3^{10} = 59\,049 \\
 (5^3)^2 &= 5^{3 \times 2} = 5^6 = 15\,625 \\
 (7^2)^4 &= 7^{2 \times 4} = 7^8 = 5\,764\,801 \\
 (2^7)^2 &= 2^{7 \times 2} = 2^{14} = 16\,384
 \end{aligned}$$

2.13.1) POTENCIA DE UN EXPONENTE ENTERO NEGATIVO

Si tenemos un exponente negativo, para cambiarlo a positivo, si está en el numerador lo cambiamos al denominador; si está en el denominador lo cambiamos al numerador. Note que todo cambio del numerador al denominador o del denominador al numerador, cambia solamente de signo al exponente y no a la base.

Esto es:

$$a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$$

Por ejemplo : $4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{4 \times 4} = \frac{1}{16}$

$$\frac{1}{a^{-n}} = a^{0-(-n)} = a^{0+n} = a^0 \cdot a^n = 1 \cdot a^n = a^n$$

Por ejemplo : $\frac{1}{3^{-4}} = 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$



Ejercicio 11

Evaluar las potencias siguientes:

- 1) 2^{10}
- 2) 4^{-2}
- 3) $3^4 \times 6^2$
- 4) $2^3 \times 2^2 \times 2$
- 5) $6^2 \times 6^3$
- 6) $\frac{5^4}{5}$
- 7) $\frac{3^6}{3^2}$
- 8) $(2^4)^3$
- 9) $(3^{-2})^2$
- 10) $\frac{1}{5^{-4}}$

UNIDAD XII

2.14) RADICACION

Es una operación opuesta a la potenciación y consiste en dado un radicando a la raíz enésima, hallar un número que elevado a la enésima potencia de cómo resultado el radicando.

Sus elementos son:

$\sqrt[n]{\text{Radicando}}$
al símbolo $\sqrt{}$ se le llama radical

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\sqrt{25} &= 5 \quad \text{porque} \quad 5^2 = 5 \times 5 = 25 \\ \text{Cuando es raíz cuadrada el tipo de raíz no se escribe} \\ \sqrt[3]{27} &= 3 \quad \text{porque} \quad 3^3 = 3 \times 3 \times 3 = 27 \\ \sqrt[4]{256} &= 4 \quad \text{porque} \quad 4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256 \\ \sqrt[7]{128} &= 2 \quad \text{porque} \quad 2^7 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 128 \\ \sqrt[3]{-27} &= -3 \quad \text{porque} \quad (-3)^3 = -3 \times -3 \times -3 = -27\end{aligned}$$

Si el radicando es negativo y el tipo de raíz es un número impar, si existe una raíz enésima negativa. En cambio, si el radicando es negativo y el tipo de raíz es un número par, entonces no existe una raíz, al menos en el campo de los números reales.

2.14.1) POTENCIAS DE EXPONENTES FRACCIONARIOS

Todo tipo de raíz puede expresarse mediante un exponente fraccionario. Donde el numerador será el exponente que tenga el radicando y el denominador será el tipo de raíz que se trate.

Esto es:

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Por ejemplo:

$$1) \sqrt[5]{x^3} = x^{\frac{3}{5}}; \quad 2) \sqrt{x^4} = x^{\frac{4}{2}} = x^2; \quad 3) \sqrt[4]{5^8} = 5^{\frac{8}{4}} = 5^2 = 25$$

En forma inversa, se tiene:

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

Por ejemplo:

$$1) x^{\frac{7}{4}} = \sqrt[4]{x^7}; \quad 2) x^{\frac{9}{2}} = \sqrt{x^9}; \quad 3) 5^{\frac{3}{10}} = \sqrt[10]{5^3} = \sqrt[10]{125}$$

$$4) 2^{\frac{11}{3}} = 2^{3\frac{2}{3}} = 2^3 \cdot 2^{\frac{2}{3}} = 8\sqrt[3]{2^2} = 8\sqrt[3]{4}$$

Si el exponente fraccionario es negativo, primero lo convertimos en positivo, cambiándolo del numerador al denominador o viceversa. Después procedemos como en la regla anterior.

$$a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{a^{\frac{m}{n}}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Por ejemplo :

$$1) x^{-\frac{7}{4}} = \frac{1}{x^{\frac{7}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{x^7}}; \quad 2) 10^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{10^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{10^5}} = \frac{1}{\sqrt{100000}};$$

$$4) 2^{-\frac{12}{4}} = \frac{1}{2^{\frac{12}{4}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2^{12}}} = \frac{1}{\sqrt[4]{4096}} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\text{En este caso, es evidente que } 2^{-\frac{12}{4}} = 2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} = 0.125$$

**Ejercicio 12**

Evaluar los radicales siguientes:

1) $\sqrt{625}$

1) $\sqrt{1024}$

3) $\sqrt[3]{64}$

4) $\sqrt[4]{256}$

5) $\sqrt[5]{243}$

Transformar a exponente fraccionario
los radicales siguientes :

6) $\sqrt[4]{x^5}$

7) $\sqrt{x^7}$

8) $\sqrt[3]{x^8}$

9) $\sqrt[5]{x}$

10) $\sqrt[6]{x^9}$



UNIDAD XIII

2.15) NÚMEROS PRIMOS

2.15.1) DEFINICIÓN

NUMERO PRIMO: Es todo número natural que sólo se divide entre sí mismo y la unidad.

De la definición anterior podemos concluir que un número primo p , sólo tiene 2 divisores, el mismo número p y la unidad, esto es, sus divisores son: $\{p, 1\}$.

La palabra primo de acuerdo a su raíz, significa *primero* o *principal*. Los diez primeros números primos positivos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 y 29. El libro IX de *Elementos de geometría* del matemático griego Euclides contiene la demostración de que la cantidad de números primos es infinita, es decir, no existe un número primo máximo.

Dos números primos cuya diferencia es 2 (por ejemplo, 5 y 7, 17 y 19, 101 y 103) se denominan primos *gemelos*. No se sabe si la cantidad de primos gemelos es infinita. Aunque todavía no se ha podido demostrar, se cree que todo número mayor que 2 se puede expresar como la suma de dos números primos; por ejemplo, $4 = 2 + 2$, $6 = 3 + 3$, $8 = 3 + 5$, $10 = 5 + 5$, $20 = 3 + 17$ y $100 = 3 + 97$.²

Un método útil para hallar los números primos del 1 al n , fue creado por el matemático y filósofo griego Eratóstenes (Siglo III A. de C.), por esta razón se le llama Criba de Eratóstenes. Consiste en escribir los números del 1 al n , después se suprime el 1, porque no es primo, luego se tachan los múltiplos de los números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, etc., excepto ellos mismos, ya que son primos. Los números que quedan sin tachar serán los números primos buscados.

Debido a su gran utilidad, en la pagina siguiente te doy los números primos del 1 al 1000.

²"Teoría de números", *Enciclopedia Microsoft® Encarta®* 99. © 1993-1998 Microsoft Corporation. Reservados todos los derechos.

TABLA DE LOS NÚMEROS PRIMOS DEL 1 AL 1000

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101
103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167
173	179	181	191	193	197	199	211	223	227	229	233	239
241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	301	311	313
317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397
401	409	419	421	431	433	439	443	449	457	461	463	467
479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643
647	653	659	661	673	677	683	691	701	709	719	727	733
739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823
827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887	907	911
919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997	

2.15.2) DESCOMPOSICION DE UN NÚMERO EN SUS FACTORES PRIMOS

NÚMERO COMPUESTO: Es todo número natural distinto de la unidad y que puede ser expresado como el producto de dos o más enteros positivos diferentes del número dado, los cuales son sus factores y en algunos casos pueden repetirse.

Los números compuestos tienen más de 2 divisores, a diferencia de los números primos, que sólo tienen 2 (el 1 y el mismo número).

Por ejemplo, 96 puede expresarse como $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^5 \times 3$. En general, todo número que no sea primo, será un número compuesto. Por esta razón, todo número entero par mayor que 2, es un número compuesto.

Los diez primeros números compuestos positivos son 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16 y 18. Un número compuesto se puede descomponer como producto de factores primos de forma única (sin considerar el orden de los factores). Por ejemplo,

$4 = 2 \times 2 \times 1$; $9 = 3 \times 3 \times 1$; $10 = 2 \times 5 \times 1$; y $12 = 2 \times 2 \times 3 \times 1$. Note que los números compuestos tienen 2 o más factores y que dichos factores todos son primos, excepto el 1. Por esto, se ha establecido el siguiente teorema.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA: Todo número entero puede ser expresado como producto de sus factores primos. Es decir, todo número entero puede descomponerse en factores de números primos.

Este teorema es muy útil e interesante, pues nos dice, que todo número entero pueden descomponerse en factores de números primos. Esto significa que si deseamos descomponer o factorizar un número entero, sólo tenemos que buscar sus factores o divisores entre el conjunto de números primos.

Regla: Para determinar los factores primos de un número, se divide dicho número en forma consecutiva, empleando como divisores únicamente números primos en forma ascendente, es decir, empezamos con 2, después con 3, luego con 5, 7, 11, 13, etc. Los cocientes obtenidos se convierten en dividendos y se continua el proceso hasta obtener como factor la unidad.

En general, para cualquier número primo p cada número compuesto menor que p^2 tiene un número primo menor que p como factor. Esto es útil al descomponer un número en sus factores primos, ya que debemos dividirlo únicamente entre los números primos menores que raíz de p .

Por ejemplo, para descomponer 343 en sus factores primos, únicamente utilizaremos los números primos menores que $\sqrt{343} = 18.52 \approx 19$, es decir, probaríamos si es divisible por 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 y 19.

Por supuesto, es muy útil tomar en cuenta los criterios de divisibilidad, para acelerar el proceso.

EJEMPLOS:

Descomponer en sus factores primos a 240

240	Factor
120	2
60	2
30	2
15	2
5	3
1	5

Note que el producto de los dos números inferiores, da como resultado el número superior de la columna 1. Así, $120 \times 2 = 240$; $60 \times 2 = 120$; $30 \times 2 = 60$; $15 \times 2 = 30$; $5 \times 3 = 15$ y $1 \times 5 = 5$. También, cuando uno de los factores es la unidad, indica que hemos terminado la descomposición en factores primos.

Es decir, $240 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 = 2^4 \times 3 \times 5$

b) Descomponer en sus factores primos a 756

756	Factor
378	2
189	2
63	3
21	3
7	3
1	7

O sea, $756 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3^3 \times 7$

c) Descomponer en sus factores primos a 895 356

895356	Factor
447678	2
223839	2
74613	3
24871	3
3553	7
323	11
19	17
1	19

Esto es, $895\ 356 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19 = 2^2 \times 3^2 \times 7 \times 11 \times 17 \times 19$



Ejercicio 13

1) Defina con sus propias palabras los conceptos siguientes:

- a) Número primo
- b) Número compuesto
- c) Teorema fundamental de la Aritmética.
- d) Regla para determinar los factores primos de un número.

2) DESCOMPONER EN SUS FACTORES PRIMOS LOS NÚMEROS SIGUIENTES:

- a) 210
- b) 5 184
- c) 2 002
- d) 33 507
- e) 7 475
- f) 32 562
- g) 436 723

UNIDAD XIV

2.16) MÍNIMO COMÚN MULTIPLO

Múltiplo de un número: Un número es múltiplo de otro número, sí al efectuar la división del número mayor entre el número menor ésta es exacta, es decir, el residuo es cero. También, se define como *el producto del número dado por un entero cualquiera*.

Así 18 es múltiplo de 1, 2, 3, 6, 9, 18. Porque 18 al dividirse entre estos números se divide exactamente.

$$\frac{18}{1} = 18; \frac{18}{2} = 9; \frac{18}{3} = 6; \frac{18}{6} = 3; \frac{18}{9} = 2; \frac{18}{18} = 1$$

Para buscar múltiplos de un número, solo hay que multiplicar dicho número consecutivamente por: 1, 2, 3, 4, 5,....., etc.

Por ejemplo, los números 9, 18, 27, 36, 45,, son múltiplos de 9, porque:

$$9 = 9 \times 1$$

$$18 = 9 \times 2$$

$$27 = 9 \times 3$$

$$36 = 9 \times 4$$

$$45 = 9 \times 5$$

Para los números 12 y 18 sus múltiplos son:

$$12: \{12, 24, 36, 48, 60, 72, 84, 96, 108, 120, \dots\}$$

$$18: \{18, 36, 54, 72, 90, 108, 126, 144, 162, 180, \dots\}$$

El conjunto de los múltiplos comunes es el que consta de los números que son múltiplos a la vez de 12 y 18, es decir: $\{36, 72, 108, \dots\}$

El elemento menor de este conjunto, 36, recibe el nombre de **mínimo común múltiplo** (M. C. M.) de los números dados. En general, es el menor de los números que es múltiplo común de cada uno de los números dados. Es decir, es el menor número que los contiene un número exacto de veces.

Mediante la factorización prima de los números dados, se puede determinar el M. C. M. De ellos.

Regla para hallar el M. C. M. :

- Se descompone cada número dado en sus factores primos.

- Se consideran los números primos que son factores comunes de los números dados y se determina el producto de dichos factores afectados de su mayor exponente, incluyendo en este producto los factores que no se repiten (factores no comunes). Es decir, el M.C.M. se forma con el producto de los factores primos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

Hallar el mínimo común múltiplo de 96 y 108

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

96	Factor
48	2
24	2
12	2
6	2
3	2
1	3

Es decir, $96 = 2^5 \times 3$

108	Factor
54	2
27	2
9	3
3	3
1	3

Es decir, $108 = 2^2 \times 3^3$

Tomando de los factores primos que se repiten 2^5 , 3, 2^2 , 3^3 , los de mayor exponente.

Por lo tanto, el M. C. M. = $2^5 \times 3^3 = 864$

Hallar el mínimo común múltiplo de 33, 49, 165, 245 y 343.

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

33	Factor
11	3
1	11

Es decir, $33 = 3 \times 11$

49	Factor
7	7
1	7

Es decir, $49 = 7^2$

165	Factor
55	3
11	5
1	11

Es decir, $165 = 3 \times 5 \times 11$

245	Factor
49	5
7	7
1	7

Es decir, $245 = 5 \times 7^2$

343	Factor
49	7
7	7
1	7

Es decir, $343 = 7^3$

Tomando de los factores primos que se repiten 3, 11, 7^2 , 5, 7^3 los de mayor exponente. Queda $3 \times 11 \times 7^3 \times 5$.

Por lo tanto, el M. C. M. = $3 \times 11 \times 7^3 \times 5 = 56\,595$

Hallar el mínimo común múltiplo de 123 y 215.

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

123	Factor
41	3
1	41

Es decir, $123 = 3 \times 41$

215	Factor
43	5
1	43

Es decir, $215 = 5 \times 43$

Tomando los factores primos que en este caso no se repiten.

Por lo tanto, el M. C. M. = $3 \times 41 \times 5 \times 43 = 26\,445$

Cuando ya se tiene práctica, puedes realizar la factorización prima de todos los números a la vez, tal como se muestra en el ejemplo siguiente: Hallar el M. C. M. De 529, 1058, 1587 y 5290.

529	1058	1587	5290	Factor
	529		2645	2
		529		3
			529	5
23	23	23	23	23
1	1	1	1	23

Por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 3 \times 5 \times 23^2 = 15\ 870$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

1) Hallar la menor capacidad posible de un depósito que se puede llenar en un número de minutos, abriendo al mismo tiempo 3 llaves que vierten líquido. La 1ª de 12 litros por minuto, la 2ª de 18 litros por minuto y la 3ª de 20 litros por minuto. ¿Cuánto tiempo tardaría en llenarse?

Solución: la respuesta nos la da el mínimo común múltiplo

12	18	20	Factor
6	9	10	2
3		5	2
1	3		3
	1		3
		1	5

Por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 180$ litros

El volumen que se vierte en un minuto = $12 + 18 + 20 = 50$ litros

Tiempo que tarda en llenarse = $180 \text{ litros} / 50 \text{ litros/minuto} = 3.6 \text{ minutos} = 3 \text{ minutos } 36 \text{ segundos}$.

2) Hallar el menor número de bombones necesario para repartir en tres grupos de 20, 25 y 30 alumnos, de modo que cada alumno reciba un número exacto de bombones y que no sobren. ¿Cuántos bombones recibirá cada alumno de cada grupo?.

Para que les toque un número exacto, debemos hallar el M. C. M. Del número de alumnos.

20	25	30	Factor
10		15	2
5			2
		5	3
1	5	1	5
	1		5

Por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 = 300$ bombones

Al primer grupo le tocan $300 \text{ bombones} / 20 \text{ alumnos} = 15$ bombones por alumno.

Al segundo grupo le tocan $300 \text{ bombones} / 25 \text{ alumnos} = 12$ bombones por alumno

Al tercer grupo le tocan $300 \text{ bombones} / 30 \text{ alumnos} = 10$ bombones por alumno

Si cada bolsa trae 30 bombones se necesitan 10 bolsas para reunir 300 bombones.

3) ¿Cuál será la menor longitud de una varilla que se puede dividir en pedazos de 8, 9 o 15 cm de longitud sin que sobre ni falte nada?. ¿Cuántos pedazos de cada longitud se podrán sacar de esa varilla?

8	9	15	Factor
4			2
2			2
1			2
	3	5	3
	1		3
		1	5

Por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 360$ centímetros = 3 metros

De la primera longitud se pueden sacar $360 \text{ cm} / 8 \text{ cm/pedazo} = 45$ pedazos

De la segunda longitud se pueden sacar $360 \text{ cm} / 9 \text{ cm/pedazo} = 40$ pedazos

De la primera longitud se pueden sacar $360 \text{ cm} / 15 \text{ cm/pedazo} = 24$ pedazos



Ejercicio 14

Hallar el M. C. M. de los siguientes grupos de números.

- 1) 32, 80
- 2) 5, 7, 10, 14
- 3) 96, 102, 192, 306
- 4) 13, 19, 39, 342
- 5) 15, 16, 48, 150
- 6) 14, 38, 56, 114
- 7) 91, 845, 1690, 2197

8) ¿Cuál será la menor suma de dinero que se puede tener en billetes de \$ 10, \$20 y \$50 pesos?. ¿Cuántos billetes de cada denominación se tendrían para formar esa cantidad?

9) Diana en su fiesta de cumpleaños, tiene que repartir tres pasteles de diferentes sabores, entre 30 niños, 20 niñas y 15 adultos, de modo que cada uno reciba un número exacto de rebanadas de los tres pasteles, ¿Cuántas rebanadas es necesario cortar en los tres pasteles, como mínimo?

10) Un carpintero desea poder obtener pedazos de 10 cm, 16 cm y 20 cm de longitud de un barrote de madera, sin que le sobre ni falte madera. ¿Cuál será la menor longitud del barrote? ¿Cuántos pedazos de cada longitud se obtendrán?

11) José es piloto en una compañía de aviación local, si tiene tres vuelos fijos cada 15, 10 y 14 días respectivamente, Hoy se vio en problemas porque le tocan los tres vuelos. ¿Cuándo será la próxima vez que le ocurra lo mismo?

UNIDAD XV

2.17) MÁXIMO COMÚN DIVISOR

DIVISIBILIDAD: Un número es divisible entre otro cuando al dividir el primero entre el segundo, el cociente es exacto.

EJEMPLOS:

$$\frac{256}{2} = 128; \quad \frac{345}{3} = 115; \quad \frac{2856}{8} = 357$$

La “*Divisibilidad*” es la propiedad que tiene un número para ser dividido exactamente entre otro.

MÁXIMO COMÚN DIVISOR: Es el mayor número que es divisor común de cada uno de un conjunto de números dados. Es el número mayor que divide exactamente a los números dados.

Divisor: es aquel número que divide a otro en forma exacta.

Por ejemplo, los divisores de 12 y 18 son:

12: {1, 2, 3, 4, 5, 6, 12}

18: {1, 2, 3, 6, 9, 18}

El conjunto de los divisores comunes de 12 y 18, son aquellos números que son divisores a la vez de 12 y 18.

Esto es: {1, 2, 3, 6}

El mayor elemento de este conjunto es 6, que recibe el nombre de máximo común divisor (M. C. D.).

Mediante la factorización prima de los números dados, se puede determinar el M. C. D. De ellos.

Regla:

Se descompone cada número dado en sus factores primos.

Se consideran los números primos que son divisores comunes de los números dados y se determina el producto de dichos divisores afectados de su menor exponente.

Ejemplos:

Hallar el máximo común divisor de 24 y 68.

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

24	Factor
12	2
6	2
3	2
1	3

Es decir, $24 = 2^3 \times 3$

68	Factor
34	2
17	2
1	17

Es decir, $68 = 2^2 \times 17$

Tomando de los factores primos que se repiten 2^3 y 2^2 , el de menor exponente.

Por lo tanto, el M. C. D. = $2^2 = 4$

Hallar el M. C. D. de 15, 45 y 60.

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

15	Factor
5	3
1	5

Es decir, $15 = 3 \times 5$

45	Factor
15	3
5	3
1	5

Es decir, $45 = 3^2 \times 5$

60	Factor
30	2
15	2
5	3
1	5

Es decir, $60 = 2^2 \times 3 \times 5$

Tomando de los factores primos que se repiten 3^2 , 3, y 5, con su menor exponente.

Por lo tanto, el M. C. D. = $3 \times 5 = 15$

Simplificar la fracción:

$$\frac{76}{1425}$$

Una fracción está simplificada o reducida a su mínima expresión, cuando numerador y denominador son primos entre sí, es decir, cuando ya no tienen ningún divisor común, entonces se dice que la fracción es irreducible.

Si se quiere simplificar una fracción, se dividen numerador y denominador por el mismo número. Note que el valor de una fracción no se altera al dividir ambos términos por un mismo número,

Solución: Descomponiendo en sus factores primos

76	Factor
38	2
19	2
1	19

Es decir, $76 = 2^2 \times 19$

1425	Factor
475	3
95	5
19	5
1	19

Es decir, $1425 = 3 \times 5^2 \times 19$

Esto es,

$$\frac{76}{1425} = \frac{2^2 \times 19}{3 \times 5^2 \times 19}$$

Quitando el factor común 19 del numerador y del denominador, se obtiene :

$$\frac{76}{1425} = \frac{2^2}{3 \times 5^2} = \frac{4}{75}$$

Cuando ya tienes práctica, puedes realizar la factorización prima de todos los números a la vez, tal como se muestra en el ejemplo siguiente:

Hallar el máximo común divisor de 2523, 5046, 5887 y 7569

Solución:

2523	5046	5887	7569	Factor
	2523			2
841	841		2523	3
			841	3
		841		7
29	29	29	29	29
1	1	1	1	29

Note que 29 se repite dos veces como factor común a todos los números dados, por lo tanto, el M. C. M. Es $29 \times 29 = 29^2 = 841$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

- 1) Una persona camina un número exacto de pasos andando 650 cm, 800 cm y 1000 cm ¿Cuál es la mayor longitud posible de cada paso?

Solución: La respuesta está dada por el máximo común divisor

650	800	1000	Factor
325	400	500	2
	200	250	2
	100	125	2
	50		2
	25		2
65	5	25	5
13	1	5	5
		1	5
1			13

Note que el primer 2 es divisor común y que 5 se repite dos veces como divisor común a todos los números dados, por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2 = 50$ cm. Que es la longitud del paso buscada.

2) Un padre da a uno de sus hijos \$ 80 pesos, a otro \$ 75 pesos y a otro \$ 60 pesos para que los repartan entre los pobres, de modo tal que a cada pobre le toque la misma cantidad. ¿Cuál es la mayor cantidad que podrán dar a cada pobre? ¿A cuántos pobres pueden beneficiar? Solución: La respuesta está dada por el máximo común divisor

80	75	60	Factor
40		30	2
20		15	2
10			2
5			2
	25	5	3
1	5	1	5
	1		5

Note que el único divisor común es 5, por lo tanto, el M. C. M. Es 5 pesos. Que es la cantidad a repartir a cada pobre.

El total de dinero a repartir es: \$ 80 + \$ 75 + \$ 60 = \$ 215 pesos

La cantidad de pobres beneficiados es = 215 pesos / 5 pesos/pobre = 43 pobres

3) Un hombre tiene 3 rollos de billetes de banco. En uno tiene \$ 4500 pesos, en otro \$ 5240 pesos y en otro \$ 6500 pesos. Si todos los billetes son iguales y de la mayor denominación posible, ¿Cuánto vale cada billete y cuántos billetes hay en cada rollo? Solución: La respuesta está dada por el máximo común divisor

4500	5240	6500	Factor
2250	2620	3250	2
1125	1310	1625	2
	655		2
375			3
125			3
25	131	325	5
5		65	5
1		13	5
		1	13
	1		131

Note que el 2 se repite dos veces como divisor común y que 5 es divisor común de todos los números dados, por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5 = \$ 20$ pesos. Que es el valor del billete buscado.

Por lo tanto, el número de billetes en cada rollo es :

En el primer rollo hay $\$ 4500 \text{ pesos} / \$ 20 \text{ pesos} / \text{billete} = 225 \text{ billetes}$

En el segundo rollo hay $\$ 5240 \text{ pesos} / \$ 20 \text{ pesos} / \text{billete} = 262 \text{ billetes}$

En el tercer rollo hay $\$ 6500 \text{ pesos} / \$ 20 \text{ pesos} / \text{billete} = 325 \text{ billetes}$

4) Se tienen 3 extensiones de 3675, 1575 y 2275 m² de superficie respectivamente y se quieren dividir en parcelas iguales. ¿Cuál ha de ser la superficie de cada parcela para que el número de parcelas sea el menor posible?

3675	1575	2275	Factor
1225	525		3
	175		3
245	35	455	5
49	7	91	5
7	1	13	7
1			7
		1	13

Note que el 5 se repite dos veces como divisor común y que 7 es divisor común de todos los números dados, por lo tanto, el M. C. M. Es $5 \times 5 \times 7 = 5^2 \times 7 = 175 \text{ m}^2$. Que es el valor del tamaño de la parcela buscada.

6) Compré cierto número de trajes por \$ 2050 pesos. Vendí una parte por \$ 1500 pesos, cobrando por cada traje lo mismo que me había costado. Hallar el mayor valor posible de cada traje y en ese supuesto, ¿Cuántos trajes me quedaron?

2050	1500	Factor
1025	750	2
	375	2
	125	3
205	25	5
41	5	5
	1	5
1		41

Note que el 2 es divisor común y que 5 se repite dos veces como divisor común de todos los números dados, por lo tanto, el M. C. M. Es $2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2 = \$ 50$ pesos. Que es el valor de cada uno de los trajes.

Trajes que quedan = $(\$ 2050 - \$ 1500)$ pesos / $\$ 50$ pesos/traje
 $= \$ 550$ pesos / $\$ 50$ pesos/traje = 11 trajes.



Ejercicio 15

1) HALLAR EL M.C.D. DE LOS SIGUIENTES GRUPOS DE NÚMEROS.

- a) 144, 520
- b) 33, 77, 121
- c) 464, 812, 870
- d) 57, 133, 532, 1824
- e) 961, 2821, 2418, 10571
- f) 465, 744, 837, 2511
- g) 3174, 4761, 9522, 12696

2) Se tienen tres ranchos de 14,700, 6,300 y 9,100 m². de superficie respectivamente, se desea dividir en parcelas de igual superficie. ¿Cuál es el tamaño posible de la parcela para que el número en cada uno de los ranchos sea el menor posible?

3) Félix desea repartir su fortuna en pesos de: 110 millones en cuentas bancarias, 42 millones en acciones de hoteles y 68 millones en propiedades; entre algunos miembros de toda su familia, quiere que a cada uno le correspondan de los tres bienes en forma exacta. ¿ Entre cuántos miembros de su familia deberá repartir su fortuna?.

4) Se tienen tres urnas que contienen 900 fichas rojas, 1048 fichas verdes y 1300 fichas amarillas y se van a repartir entre jugadores de naipes con el fin de ser usadas en lugar de dinero. Si a cada jugador le debe corresponder exactamente la misma cantidad de fichas de los tres colores, ¿Cuántos jugadores están en la ronda?

5) ¿Cuál será la mayor longitud de un cable, con la que se puedan medir exactamente tres dimensiones de 70, 280 y 400 metros?

6) ¿Se podrán dividir tres listones de 56, 84 y 140 centímetros, en pedazos de 4 centímetros de longitud sin que sobre ni falte entre cada listón?

UNIDAD XVI

2.18) OPERACIONES CON NUMEROS FRACCIONARIOS

Un número fraccionario es el cociente indicado de una división entre dos números enteros. También se define como el que representa un número de partes iguales de una unidad dividida.

Los números fraccionarios son en realidad los famosos quebrados, aunque también se les denominan simplemente fracciones.

Se representan por:

$$\frac{a}{b} \text{ donde } a \text{ es el numerador y } b \text{ es el denominador.}$$

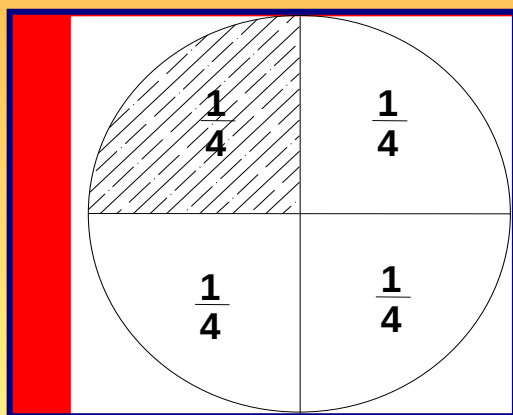
Ejemplos de números fraccionarios:

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{1}{14}, \frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}, \text{ etc.}$$

El numerador nos indica el número de partes iguales que tomamos de la unidad o entero.

El denominador es el número de partes iguales en las que se dividió la unidad o entero. Al numerador y al denominador se llaman términos de la fracción.

Por ejemplo, en la fracción $\frac{1}{4}$, significa que el entero se dividió en 4 partes iguales (denominador) y que de ese entero tomamos solo 1 parte (numerador).

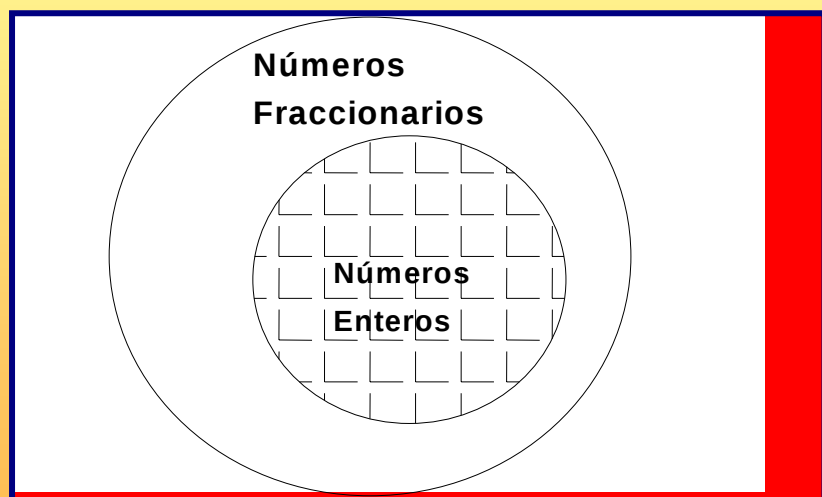


Gráficamente:

A la mayoría de los estudiantes no les gusta trabajar con números fraccionarios o quebrados, porque piensan que los números fraccionarios casi ni se utilizan ni

aparecen muy frecuentemente. Cabe mencionar que los números fraccionarios son más abundantes que los números enteros, recordando que éstos son un subconjunto o parte de los fraccionarios.

Esto es:



Por ejemplo, los siguientes son números enteros que al ser divididos entre 1, no cambian, es decir, todo número entero se puede expresar como número fraccionario al ser dividido entre 1.

O sea:

$$\frac{3}{1}, \frac{5}{1}, \frac{1}{1}, \frac{9}{1}, \frac{7}{1}, \frac{8}{1}, \frac{2}{1}, \text{ etc.}$$

Las fracciones se clasifican en: fracciones propias, fracciones impropias y fracciones mixtas.

Las fracciones propias son todas aquellas en las que el numerador es menor que el denominador, es decir, toda fracción propia siempre será menor que la unidad (1).

Por ejemplo, todas las fracciones siguientes son propias:

$$\frac{3}{8}, \frac{5}{7}, \frac{1}{14}, \frac{9}{10}, \frac{1}{2}, \frac{5}{12}, \frac{2}{5}, \text{ etc.}$$

Nota que el numerador siempre es menor que el denominador. Por ejemplo, $\frac{3}{8} = 0.375$ que es menor que 1.

Las fracciones impropias son todas aquellas en las que el numerador es mayor que el denominador, es decir, toda fracción impropia siempre será mayor que la unidad (1).

Por ejemplo, todas las fracciones siguientes son impropias:

$$\frac{10}{8}, \frac{15}{7}, \frac{14}{12}, \frac{9}{4}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{12}{5}, \text{ etc.}$$

Nota que el numerador siempre es mayor que el denominador. Por ejemplo, $3/2 = 1.5$ que es mayor que 1.

Las fracciones mixtas son todas aquellas que están compuestas de un número entero y una fracción propia.

Su forma general es:

$$a \frac{b}{c} \text{ donde } a \text{ son los enteros, } b \text{ es el numerador y } c \text{ el denominador}$$

Ejemplos de fracciones mixtas:

$$5 \frac{3}{4}, 7 \frac{2}{3}, 12 \frac{4}{9}, 1 \frac{1}{5}, \text{ etc.}$$

Una fracción mixta siempre surge de una fracción impropia en la cual se ha realizado la división. Sea por ejemplo la fracción $19/7$, si realizamos la división entera resulta:

$$7 \overline{) \begin{array}{r} 19 \\ 5 \end{array}}$$

El cociente representa los enteros, el residuo será el numerador y el divisor será el denominador de la fracción mixta. Es decir, esto se puede expresar como:

$$\frac{19}{7} = 2 \frac{5}{7}$$

En general, al hacer la división de la fracción impropia, la fracción mixta se expresa como :

$$\begin{array}{r} \text{Cociente} \quad \text{Residuo} \\ \hline \text{Divisor} \end{array}$$

Ejemplo: Convertir la fracción impropia $23/5$ a fracción mixta.

Realizando la división, se tiene : $5 \overline{)23} \begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix}$

$$\frac{23}{5} = \text{Cociente} \quad \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}} = 4 \frac{3}{5}$$

Ejemplo: Convertir la fracción impropia $49/9$ a fracción mixta.

Realizando la división, se tiene : $9 \overline{)49} \begin{matrix} 5 \\ 4 \end{matrix}$

$$\frac{49}{9} = \text{Cociente} \quad \frac{\text{Residuo}}{\text{Divisor}} = 5 \frac{4}{9}$$

Si nos dan una fracción mixta, esta puede convertirse a fracción impropia invirtiendo el proceso de la división, que se establece en la regla siguiente: El número de enteros se multiplica por el denominador y a esto se le suma el numerador, quedando dividido todo entre el mismo denominador de la fracción mixta.

Esto es:

En general, dada una fracción mixta se convierte a fracción impropia mediante :

$$\frac{\text{Enteros} \times \text{Denominador} + \text{Numerador}}{\text{Denominador}}$$

A continuación se muestra la conversión de fracción mixta a fracción impropia.

1) Convertir $7\frac{3}{5}$ a fracción impropia

$$\frac{\text{Enteros} \times \text{Denominador} + \text{Numerador}}{\text{Denominador}} = \frac{7 \times 5 + 3}{5} = \frac{35 + 3}{5} = \frac{38}{5}$$

2) Convertir $11\frac{8}{9}$ a fracción impropia

$$\frac{11 \times 9 + 8}{9} = \frac{99 + 8}{9} = \frac{107}{9}$$

3) Convertir $2\frac{5}{7}$ a fracción impropia

$$\frac{2 \times 7 + 5}{7} = \frac{14 + 5}{7} = \frac{19}{7}$$

**Ejercicio 16**

1) Clasificar las siguientes fracciones como propias o impropias:

- a) $\frac{2}{3}$
- b) $\frac{11}{10}$
- c) $\frac{7}{4}$
- d) $\frac{9}{13}$
- e) $\frac{12}{5}$

2) Convertir las fracciones impropias a fracciones mixtas:

- a) $\frac{15}{4}$
- b) $\frac{19}{2}$
- c) $\frac{10}{3}$
- d) $\frac{7}{3}$
- e) $\frac{3}{2}$

3) Convertir las fracciones mixtas a fracciones impropias:

- a) $2 \frac{1}{2}$
- b) $5 \frac{1}{4}$
- c) $11 \frac{2}{3}$
- d) $14 \frac{2}{7}$
- e) $10 \frac{2}{10}$

TEOREMAS IMPORTANTES DE LAS FRACCIONES

Teorema: De dos fracciones que tienen el mismo denominador, es mayor la que tiene mayor numerador.

Si $a > b$, entonces:

$$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$$

Por ejemplo:

$$\frac{6}{7} > \frac{4}{7}$$

Teorema: De dos fracciones que tienen el mismo numerador, es mayor la que tiene menor denominador.

Si $a < b$, entonces:

$$\frac{c}{a} > \frac{c}{b}$$

Por ejemplo:

$$\frac{5}{2} > \frac{5}{7}$$

FRACCION EQUIVALENTE: Es la que se obtiene de multiplicar o dividir por un mismo número tanto el numerador como el denominador de una fracción.

EJEMPLOS:

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{4}{4}\right) = \frac{8}{12}; \quad \left(\frac{5}{3}\right)\left(\frac{2}{2}\right) = \frac{10}{6}; \quad \left(\frac{2}{7}\right)\left(\frac{3}{3}\right) = \frac{6}{21}$$

Para simplificar fracciones equivalentes, basta dividir numerador y denominador por una misma cantidad, es decir, sacar mitad, tercera, cuarta, quinta, etc.; al numerador y denominador de la fracción.

EJEMPLOS: Simplificar a su mínima expresión las siguientes fracciones equivalentes.

a)

$$\frac{210}{270} = \frac{105}{135} = \frac{35}{45} = \frac{7}{9}$$

mitad tercera quinta

b)

$$\frac{216}{162} = \frac{108}{81} = \frac{36}{27} = \frac{12}{9} = \frac{4}{3}$$

mitad tercera tercera tercera

c)

$$\frac{2205}{1890} = \frac{735}{630} = \frac{245}{210} = \frac{49}{42} = \frac{7}{6}$$

mitad tercera quinta séptima

Teorema: Una fracción no cambia su valor, cuando se multiplican o dividen por un mismo número tanto el numerador como el denominador.

Por ejemplo, $\frac{1}{2}$ si lo multiplicamos por 3, tanto el numerador como el denominador, queda como:

$$\frac{1 \times 3}{2 \times 3} = \frac{3}{6}$$

Multiplicando este resultado por 5:

$$\frac{3 \times 5}{6 \times 5} = \frac{15}{30}$$

O sea:

$$\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{15}{30}$$

Ahora, si a $15/30$ le sacamos quinta, que significa dividir entre 5, tanto el numerador como el denominador, se obtiene:

$$\frac{15}{30} = \frac{3}{6}$$

Dividiendo este resultado por 3:

$$\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

O sea :

$$\frac{15}{30} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Observe que obtenemos nuevamente la fracción $\frac{1}{2}$, a pesar de que la hemos multiplicado y dividido varias veces. Con esto se comprueba el teorema que afirma **“Una fracción no cambia su valor, cuando se multiplican o dividen por un mismo número tanto el numerador como el denominador”**.



UNIDAD XVII

2.18.1) SUMA DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

Se presentan dos casos:

Caso I: Cuando todos los sumandos tienen el mismo denominador.

Regla: Para sumar fracciones con el mismo denominador, se suman los numeradores y a la fracción resultante se le pone el denominador común.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{5}{3} + \frac{8}{3} &= \frac{5+8}{3} = \frac{13}{3} = 4 \frac{1}{3} \\ 2) \quad \frac{4}{7} + \frac{9}{7} + \frac{11}{7} &= \frac{4+9+11}{7} = \frac{24}{7} = 3 \frac{3}{7} \\ 3) \quad \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{15}{10} + \frac{6}{10} &= \frac{3+1+15+6}{10} = \frac{25}{10} = \frac{5}{2} = 2 \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Caso II: Cuando los sumandos tienen distinto denominador.

Regla: Para sumar fracciones con distinto denominador, se obtiene primero el común denominador, que es igual al producto de los denominadores de todos los sumandos, después el común denominador se divide por el denominador de cada sumando y se multiplica por su numerador respectivo. Por último se suman todos los productos individuales y dará como resultado el numerador final y el denominador del resultado será el común denominador.

Esto es:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{b \times d}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad \frac{5}{2} + \frac{8}{7} &= \frac{\frac{14}{2} \times 5 + \frac{14}{7} \times 8}{14} = \frac{7 \times 5 + 2 \times 8}{14} = \frac{35 + 16}{14} = \frac{51}{14} = 3 \frac{9}{14} \\ 2) \quad \frac{7}{5} + \frac{1}{2} + \frac{4}{3} &= \frac{\frac{30}{5} \times 7 + \frac{30}{2} \times 1 + \frac{30}{3} \times 4}{30} = \frac{6 \times 7 + 15 \times 1 + 10 \times 4}{30} = \frac{42 + 15 + 40}{30} = \frac{97}{30} = 3 \frac{7}{30} \\ 3) \quad \frac{9}{4} + \frac{5}{2} + \frac{2}{3} &= \frac{\frac{24}{4} \times 9 + \frac{24}{2} \times 5 + \frac{24}{3} \times 2}{24} = \frac{6 \times 9 + 12 \times 5 + 8 \times 2}{24} = \frac{54 + 60 + 16}{24} = \frac{130}{24} = \frac{65}{12} = 5 \frac{5}{12} \end{aligned}$$

**Ejercicio 17**

I) Sumar las fracciones que tienen el mismo denominador

$$1) \frac{9}{5} + \frac{17}{5} =$$

$$2) \frac{7}{9} + \frac{3}{9} + \frac{14}{9} =$$

$$3) \frac{6}{33} + \frac{8}{33} + \frac{12}{33} + \frac{7}{33} =$$

II) Sumar las fracciones que tienen distinto denominador

$$1) \frac{3}{2} + \frac{2}{3} =$$

$$2) \frac{4}{3} + \frac{5}{2} + \frac{7}{4} =$$

$$3) \frac{5}{4} + \frac{4}{5} + \frac{9}{2} =$$

$$4) \frac{7}{2} + \frac{6}{4} + \frac{8}{3} + \frac{9}{5} =$$



UNIDAD XVIII

2.18.2) RESTA DE NÚMEROS FRACCIONARIOS

Se presentan dos casos:

Caso I: Cuando el minuendo y el sustraendo tienen el mismo denominador.

Regla: Para restar fracciones con el mismo denominador, se restan los numeradores y a la fracción resultante se le pone el denominador común.

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \frac{8}{3} - \frac{5}{3} = \frac{8-5}{3} = \frac{3}{3} = 1 \\ 2) \quad \frac{11}{7} - \frac{9}{7} = \frac{11-9}{7} = \frac{2}{7} \\ 3) \quad \frac{7}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7-3}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5} \end{array}$$

Caso II: Cuando el minuendo y el sustraendo tienen distinto denominador.

Regla: Para restar fracciones con distinto denominador, se obtiene primero el común denominador, que es igual al producto de los denominadores del minuendo y sustraendo, después el común denominador se divide por los denominadores del minuendo y sustraendo y se multiplica por su numerador respectivo. Por último se resta el producto del sustraendo del producto del minuendo y dará como resultado el numerador final y el denominador del resultado será el común denominador.

Esto es:

$$\frac{a}{b} - \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{b \times d}$$

Ejemplos:

$$\begin{array}{l} 1) \quad \frac{5}{2} - \frac{4}{7} = \frac{\frac{14}{2} \times 5 - \frac{14}{7} \times 4}{14} = \frac{7 \times 5 - 2 \times 4}{14} = \frac{35-8}{14} = \frac{27}{14} = 1\frac{13}{14} \\ 2) \quad \frac{7}{5} - \frac{4}{3} = \frac{\frac{15}{5} \times 7 - \frac{15}{3} \times 4}{15} = \frac{3 \times 7 - 5 \times 4}{15} = \frac{21-20}{15} = \frac{1}{15} \\ 3) \quad \frac{7}{4} - \frac{2}{9} = \frac{\frac{36}{4} \times 7 - \frac{36}{9} \times 2}{36} = \frac{9 \times 7 - 4 \times 2}{36} = \frac{63-8}{36} = \frac{55}{36} = 1\frac{19}{36} \end{array}$$



Ejercicio 18

I) Restar las fracciones que tienen el mismo denominador

$$1) \frac{9}{5} - \frac{4}{5} =$$

$$2) \frac{17}{9} - \frac{6}{9} =$$

$$3) \frac{19}{33} - \frac{8}{33} =$$

II) Restar las fracciones que tienen distinto denominador

$$1) \frac{3}{2} - \frac{2}{3} =$$

$$2) \frac{13}{3} - \frac{5}{2} =$$

$$3) \frac{15}{4} - \frac{9}{5} =$$

$$4) \frac{8}{3} - \frac{9}{4} =$$



UNIDAD XIX

2.18.3) MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

El producto de dos fracciones comunes, es otra fracción común que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador, el producto de los denominadores.

Esto es:

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d} = \frac{ac}{bd}$$

Resumiendo, para multiplicar fracciones, **multiplicamos numerador con numerador y denominador con denominador**, obteniendo respectivamente el numerador y denominador de la fracción producto.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{5}{3} \times \frac{6}{7} = \frac{5 \times 6}{3 \times 7} = \frac{30}{21} = \frac{10}{7} \\ 2) \quad & \frac{9}{2} \times \frac{8}{5} = \frac{9 \times 8}{2 \times 5} = \frac{72}{10} = \frac{36}{5} \\ 3) \quad & \frac{3}{4} \times \frac{2}{9} = \frac{3 \times 2}{4 \times 9} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \\ 4) \quad & \frac{7}{6} \times \frac{11}{14} = \frac{7 \times 11}{6 \times 14} = \frac{77}{84} = \frac{11}{12} \\ 5) \quad & \frac{2}{3} \times \frac{5}{7} \times \frac{9}{8} = \frac{2 \times 5 \times 9}{3 \times 7 \times 8} = \frac{90}{168} = \frac{45}{84} = \frac{15}{28} \\ 6) \quad & \frac{4}{5} \times \frac{8}{3} \times \frac{6}{2} = \frac{4 \times 8 \times 6}{5 \times 3 \times 2} = \frac{192}{30} = \frac{96}{15} = \frac{32}{5} = 6 \frac{2}{5} \\ 7) \quad & \frac{1}{3} \times \frac{9}{5} \times \frac{10}{6} = \frac{1 \times 9 \times 10}{3 \times 5 \times 6} = \frac{90}{90} = 1 \end{aligned}$$

A pesar de que es una regla muy sencilla, muchos alumnos dudan en el momento de aplicarla, lo cual no debería pasar, ya que las reglas matemáticas son muy sencillas y cortas, pero exigen que nos las grabemos firmemente en nuestra memoria y que siempre las realicemos de la misma forma. Ya que en matemáticas lo que más se castiga, es lo que yo llamo “*la hipocresía en las matemáticas*”, que consiste en hacer las operaciones de una forma y a veces de otra diferente, lo cual es el error más grave que podemos cometer y por lo tanto el más castigado.

Aprenderse las reglas y leyes de las operaciones matemáticas es fundamental y vital, para lograr entenderlas y dominarlas. Las podemos aprender y decir con nuestras propias palabras, cuando ya sabemos su significado. Por ejemplo, he oído decir a algunos alumnos, que para multiplicar fracciones “se multiplica el de arriba por el de arriba y queda arriba, luego el de abajo por el de abajo y queda abajo”. Lo cual es correcto, a pesar de que no sea muy técnica o científica la expresión.

2.18.4) MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS FRACCIONARIOS MIXTOS

Un número entero entre otro se convierte en una fracción;

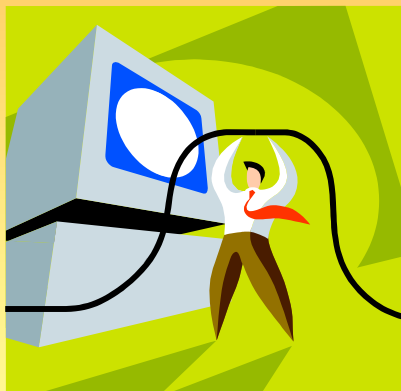


Ejercicio 19

Evaluar las siguientes multiplicaciones de quebrados:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{6}{7} = \\ 2) \quad & \frac{11}{4} \times \frac{8}{3} \times \frac{9}{2} = \\ 3) \quad & 2 \times 3 \times \frac{5}{14} = \\ 4) \quad & 5\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{4} = \\ 5) \quad & 3 \times 4\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6) \quad & 4 \times \frac{3}{5} = \\ 7) \quad & 5\frac{3}{4} \times 4\frac{3}{5} \times \frac{1}{15} = \\ 8) \quad & \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \times 10 = \\ 9) \quad & \frac{3}{8} \times 9 = \\ 10) \quad & 2 \times 3\frac{1}{6} \times 6\frac{1}{3} \times \frac{1}{18} = \end{aligned}$$



UNIDAD XIX

2.18.6) DIVISIÓN DE FRACCIONES

Para dividir dos fracciones comunes, se multiplica **la fracción dividendo** por el **recíproco** de **la fracción divisor**.

Esto es:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{ad}{bc}$$

Ejemplos:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{5}{3} \div \frac{6}{7} = \frac{5}{3} \times \frac{7}{6} = \frac{5 \times 7}{3 \times 6} = \frac{35}{18} = 1 \frac{17}{18} \\ 2) \quad & \frac{4}{2} \div \frac{5}{9} = \frac{4}{2} \times \frac{9}{5} = \frac{4 \times 9}{2 \times 5} = \frac{36}{10} = 3 \frac{6}{10} = 3 \frac{3}{5} \\ 3) \quad & \frac{8}{5} \div \frac{2}{11} = \frac{8}{5} \times \frac{11}{2} = \frac{8 \times 11}{5 \times 2} = \frac{88}{10} = \frac{44}{5} = 8 \frac{4}{5} \\ 4) \quad & \frac{9}{8} \div \frac{8}{9} = \frac{9}{8} \times \frac{9}{8} = \frac{9 \times 9}{8 \times 8} = \frac{81}{64} = 1 \frac{17}{64} \\ 5) \quad & \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{1} = \frac{1 \times 3 \times 4}{2 \times 1 \times 1} = \frac{12}{2} = 6 \\ 6) \quad & \frac{4}{5} \div \frac{7}{3} \div \frac{10}{7} = \frac{4}{5} \times \frac{3}{7} \times \frac{7}{10} = \frac{4 \times 3 \times 7}{5 \times 7 \times 10} = \frac{84}{350} = \frac{42}{175} \\ 7) \quad & \frac{2}{7} \div \frac{8}{5} \div \frac{4}{9} = \frac{2}{7} \times \frac{5}{8} \times \frac{9}{4} = \frac{2 \times 5 \times 9}{7 \times 8 \times 4} = \frac{90}{224} = \frac{45}{112} \end{aligned}$$

Otra forma de realizar la división de fracciones es: mediante la multiplicación de extremos por extremos y da como resultado el numerador de la fracción resultante, mientras que su denominador se obtiene multiplicando los medios. También se le conoce como “la ley de la tortilla o del sandwich”

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{5}{3} \div \frac{6}{7} &= \frac{\frac{5}{3}}{\frac{6}{7}} = \frac{5 \times 7}{3 \times 6} = \frac{\text{extremos}}{\text{medios}} = \frac{35}{18} = 1\frac{17}{18} \\
 2) \quad \frac{4}{2} \div \frac{5}{9} &= \frac{\frac{4}{2}}{\frac{5}{9}} = \frac{4 \times 9}{2 \times 5} = \frac{\text{extremos}}{\text{medios}} = \frac{36}{10} = 3\frac{6}{10} = 3\frac{3}{5} \\
 3) \quad \frac{8}{5} \div \frac{2}{11} &= \frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{11}} = \frac{8 \times 11}{5 \times 2} = \frac{\text{extremos}}{\text{medios}} = \frac{88}{10} = 8\frac{8}{10} = 8\frac{4}{5}
 \end{aligned}$$

Otro método para dividir dos fracciones --el cual no es muy recomendable, consiste en multiplicar el numerador de la primera por el denominador de la segunda, obteniendo el numerador; y luego el denominador de la primera por el numerador de la segunda, obteniendo el denominador de la fracción cociente. A esto se le conoce como **multiplicación cruzada y sólo sirve cuando se dividen dos fracciones**.

2.18.7) DIVISIÓN DE NÚMEROS ENTEROS POR FRACCIONES

Para dividir números enteros entre una fracción, se invierte la fracción y se realiza la multiplicación de fracciones, recordando que todo entero tiene de denominador la unidad.

Ejemplos:

$$\begin{aligned}
 1) \quad 3 \div \frac{6}{7} &= \frac{3}{1} \times \frac{7}{6} = \frac{3 \times 7}{1 \times 6} = \frac{21}{6} = \frac{7}{2} = 3\frac{1}{2} \\
 2) \quad 7 \div \frac{8}{5} &= \frac{7 \times 5}{8} = \frac{35}{8} = 4\frac{3}{8} \\
 3) \quad 4 \div \frac{3}{8} &= \frac{4 \times 8}{3} = \frac{32}{3} = 10\frac{2}{3} \\
 4) \quad 5 \div \frac{8}{3} &= \frac{5 \times 3}{8} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} \\
 5) \quad 12 \div \frac{1}{2} &= \frac{12 \times 2}{1} = \frac{24}{1} = 24 \\
 6) \quad 28 \div 7 \div \frac{14}{5} &= \frac{4 \times 5}{14} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7} \\
 6) \quad 36 \div 72 \div \frac{8}{9} &= \frac{1}{2} \div \frac{8}{9} = \frac{1 \times 9}{2 \times 8} = \frac{9}{16}
 \end{aligned}$$



Ejercicio 20

Evaluar las siguientes divisiones de quebrados:

$$1) \frac{3}{5} \div \frac{11}{9} =$$

$$2) \frac{3}{4} \div \frac{5}{6} \div \frac{1}{4} =$$

$$3) \frac{1}{2} \div \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} =$$

$$4) 8 \div 3 \div \frac{1}{27} =$$

$$5) 4\frac{1}{2} \div 2\frac{1}{3} =$$

$$6) \frac{3}{8} \div 6 =$$

$$7) \frac{1}{2} \div 2 \div \frac{1}{4} =$$

$$8) 5\frac{1}{2} \div \frac{1}{8} =$$

$$9) \frac{1}{3} \div 12 \div \frac{1}{9} =$$

$$10) \frac{1}{5} \div 5 \div 25 \div \frac{1}{4} =$$



UNIDAD XX

2.18.8) CONVERSIÓN DE NÚMEROS DECIMALES PERIÓDICOS O PUROS A FRACCIONES

Todo número racional puede representarse mediante un decimal periódico o puro. Consideremos, por ejemplo, el número racional $15/7$. Al dividir 15 entre 7, los posibles residuos son 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Si el residuo es 0, la división es exacta. Si un residuo aparece por segunda vez, los términos que le siguen también se repetirán. Dado que solo hay 7 posibles residuos al dividir entre 7, los residuos se repetirán o la división resultará exacta en la séptima cifra decimal.

Realizando la división:

$$\begin{array}{r}
 2 \ . \ 1 \ 4 \ 2 \ 8 \ 5 \ 7 \\
 7 \overline{) 1 \ 5 \ . \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0} \\
 \underline{1 \ 4} \\
 \boxed{1} \ 0 \\
 \underline{7} \\
 \underline{3 \ 0} \\
 \underline{2 \ 8} \\
 \underline{2 \ 0} \\
 \underline{1 \ 4} \\
 \underline{6 \ 0} \\
 \underline{5 \ 6} \\
 \underline{4 \ 0} \\
 \underline{3 \ 5} \\
 \underline{5 \ 0} \\
 \underline{4 \ 9} \\
 \boxed{1}
 \end{array}$$

El hecho de que se presente nuevamente el residuo 1, significa que se repetirá nuevamente en la división el mismo proceso y que los dígitos 142857 se repetirán una y otra vez.

Esto se representa por:

$$\frac{15}{7} = 2.142857 \overline{142857}$$

De la misma forma, cualquier número racional $\frac{a}{b}$, puede expresarse como un número decimal puro o periódico, necesitando a lo sumo b cifras decimales para poder identificar el período repetido.

La raya en la parte superior, nos indica que este período se repite indefinidamente.

Todo número decimal puro (decimales finitos) o periódico puede escribirse como un número racional de la forma a/b .

NÚMERO DECIMAL PURO

Cuando un número decimal tiene un número finito de decimales, multiplicamos y dividimos por una potencia de 10, de manera tal que el número dado se convierta en un entero. Después, simplificamos hasta llegar a una fracción irreducible.

Simplificar una fracción significa que se divide el numerador por los divisores comunes, hasta que queden dos números que son primos entre sí.

Por ejemplo, si deseamos convertir 0.375 a número racional, como tiene milésimas necesitamos multiplicar y dividir por 1 000.

Queda:

$$\frac{0.375 \times 1000}{1000} = \frac{375}{1000} = \frac{75}{200} = \frac{15}{40} = \frac{3}{8}$$

Otro ejemplo, si deseamos convertir 0.82764 a número racional, como tiene cienmilésimas necesitamos multiplicar y dividir por 100 000.

Queda:

$$\frac{0.82764 \times 100000}{100000} = \frac{82764}{100000} = \frac{41382}{50000} = \frac{20691}{25000}$$

NÚMERO DECIMAL PERIÓDICO: Si el número dado repite n dígitos, entonces lo multiplicamos por 10^n y a esto le restamos el número dado. Después, simplificamos hasta llegar a una fracción irreducible.

Por ejemplo, si deseamos convertir el número $a = 40.5555\overline{5}$ a número racional, como repite un solo dígito, lo multiplicamos por $10^1 = 10$.

Queda:

$$\begin{array}{r} 10a = 405.5555 \\ - a = 40.5555 \\ \hline 9a = 365 \end{array}$$

Por lo tanto, despejando a , se obtiene:

$$a = \frac{365}{9}$$

Otro ejemplo, si deseamos convertir $a = 13.\underline{274}$ a número racional, como repite 3 dígitos, lo multiplicamos por $10^3 = 1\,000$.

Queda:

$$\begin{array}{r} 1000a = 13274.274 \\ - a = 13.274 \\ \hline 999a = 13261 \end{array}$$

Por lo tanto, despejando a , se obtiene:

$$a = \frac{13261}{999}$$

Otro ejemplo más, si deseamos convertir $a = 5.\underline{7654}$ a número racional, como repite 4 dígitos, lo multiplicamos por $10^4 = 10\,000$.

Queda:

$$\begin{array}{r} 10\,000a = 57654 \\ - a = 5.7654 \\ \hline 9\,999a = 57648.2346 \end{array}$$

Por lo tanto, despejando a , se obtiene:

$$a = \frac{57648.2346}{9999} = \frac{576482346}{99990000} = \frac{192160782}{33330000} = \frac{64053594}{11110000} = \frac{5823054}{1010000} = \frac{2911527}{505000}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRACTICA DE FRACCIONES

1. Una deuda se paga del siguiente modo: $\frac{1}{3}$ en el primer año, $\frac{3}{5}$ en el segundo año, y el resto al tercer año. ¿Cuánto debe pagarse en el tercer año?

Solución:

Pago del primer año + Pago del segundo año + Pago del tercer año = 1

$$\frac{1}{3} + \frac{3}{5} + \text{pago del tercer año} = 1$$

$$\frac{14}{15} + \text{pago del tercer año} = 1$$

$$\text{pago del tercer año} = 1 - \frac{14}{15} = \frac{15}{15} - \frac{14}{15}$$

$$\text{pago del tercer año} = \frac{1}{15}$$

2. Un circuito eléctrico está formado por 3 resistencias de $2 \frac{1}{8}$, $3 \frac{1}{4}$ y $9 \frac{11}{16}$ ohmios. Si todas ellas están unidas en serie, hallar la resistencia total del circuito, que es igual a la suma de las resistencias que lo componen.

$$R = 2 \frac{1}{8} + 3 \frac{1}{4} + 9 \frac{11}{16}$$

Convirtiendo las fracciones mixtas a fracciones comunes

$$R = \frac{17}{8} + \frac{13}{4} + \frac{155}{16} = \frac{17 \times 2 + 13 \times 4 + 155}{16} = \frac{241}{16} = 15 \frac{1}{16} \text{ ohmios}$$

3. La circunferencia mide aproximadamente $3 \frac{1}{7}$ veces del diámetro. Según esto, calcular la longitud de la circunferencia de un círculo de 28 metros de diámetro.

Solución:

$$P = 3 \frac{1}{7} \times 28 = \frac{22}{7} \times \frac{28}{1} = \frac{616}{7} = 88 \text{ metros}$$

4. La diagonal de un cuadrado mide aproximadamente $1 \frac{5}{12}$ veces la longitud del lado. Según esto, calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de 18 cm de lado.

Solución:

$$P = 1 \frac{5}{12} \times 18 = \frac{17}{12} \times \frac{18}{1} = \frac{306}{12} = 25.5 \text{ cm}$$

5. La aleación de unas piezas para máquina está formado por $\frac{24}{29}$ de cobre, $\frac{4}{29}$ de estaño y $\frac{1}{29}$ de zinc. ¿Cuántos Kg. de cada metal se necesitan para obtener 348 Kg. de aleación?

$$\begin{aligned} \text{Cobre} &= \frac{24}{29} \times 348 = \frac{24}{29} \times \frac{348}{1} = \frac{8352}{29} = 288 \text{ Kg.} \\ \text{Estaño} &= \frac{4}{29} \times 348 = \frac{4}{29} \times \frac{348}{1} = \frac{1392}{29} = 48 \text{ Kg.} \\ \text{Zinc} &= \frac{1}{29} \times 348 = \frac{1}{29} \times \frac{348}{1} = \frac{348}{29} = 12 \text{ Kg.} \end{aligned}$$

Comprobación: 288 Kg. de Cobre + 48 Kg. de Estaño + 12 Kg. de Zinc = 348 Kg. de aleación.

6. Un circuito en paralelo está compuesto de 3 resistencias de 6, 9 y 12 ohmios. Hallar la resistencia total del circuito.

Para hallar la resistencia total de un circuito en paralelo se utiliza la fórmula siguiente:

$$\text{Resistencia Total} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

$$\text{Resistencia Total} = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12}} = \frac{1}{\frac{6+4+3}{36}} = \frac{1}{\frac{13}{36}}$$

Sacando el recíproco, se obtiene :

$$\text{Resistencia Total} = \frac{36}{13} = 2\frac{10}{13} \text{ ohmios}$$

El recíproco de un número es el número que multiplicado por él da 1.

Por ejemplo, para el número 2, su recíproco es $\frac{1}{2}$, puesto que $2 \times \frac{1}{2} = \frac{2}{2} = 1$.

Si el número es racional o quebrado, su recíproco se obtendrá pasando el numerador al denominador y su denominador al numerador. Esto es, si la

fracción dada es a/b su recíproco será b/a . Note que su producto es 1, ya que $a/b \times b/a = ab/ab = 1$.

Si el número dado es a , entonces su recíproco es $1/a$.

7. La altura de un librero de madera es de 2 metros $6 \frac{1}{8}$ centímetros. Si se desean colocar 6 entrepaños de $1 \frac{5}{8}$ centímetros de espesor, de tal modo que el espaciado sea uniforme. Hallar la separación de entrepaños que deberá utilizar el carpintero.

Solución: La altura total del librero es de 200 centímetros + $6 \frac{1}{8}$ centímetros, o sea: $206 \frac{1}{8}$ centímetros.

El espesor total de los entrepaños es $= 6 \times 1 \frac{5}{8} \text{ cm.} = 6 \times \frac{13}{8} \text{ cm.} = \frac{78}{8} \text{ cm.}$

El espacio a cubrir es de: $206 \frac{1}{8} \text{ cm.} - \frac{78}{8} \text{ cm.} = \frac{1649}{8} \text{ cm.} - \frac{78}{8} \text{ cm.} = \frac{1571}{8} \text{ cm.} = 196 \frac{3}{8} \text{ cm.}$

Dividiendo entre 6, para obtener la distancia en entrepaños $= \frac{1571}{8} \text{ cm.} / 6 = \frac{1571}{48} \text{ cm.} = 32 \frac{35}{48} \text{ cm.}$



Ejercicio 21

Resuelva los siguientes problemas de aplicación práctica relativos a fracciones:

- 1) Lucyana compró $\frac{2}{3}$ de metro de listón azul, $\frac{4}{3}$ de metro de listón rojo y $\frac{2}{3}$ de metro de listón verde. ¿Cuántos metros de listón compró en total?
- 2) Durante el lanzamiento del transbordador espacial Columbia, la cuenta regresiva fue detenida 4 veces. El primer retardo fue de $\frac{1}{5}$ de hora, el segundo de $\frac{3}{5}$ de hora, el tercero tomó $\frac{2}{5}$ de hora y el último fue de $\frac{1}{5}$ de hora. ¿Cuánto tiempo en total se retrasó el lanzamiento?
- 3) Para medir la cantidad de lluvia se utiliza el pluviómetro el cual la mide en milímetros o en pulgadas de lluvia. ¿Cuál fue el total de lluvia en pulgadas que cayó en una semana? Si el lunes llovió $\frac{1}{2}$ pulgada, el martes $\frac{2}{3}$ de pulgada, el miércoles $\frac{3}{10}$ de pulgada y los días restantes ya no llovió.
- 4) Si un paquete de 20 kilogramos de peso se envía por vía aérea cuesta \$ 50 $\frac{1}{2}$ pesos y si se envía por vía terrestre cuesta \$ 30 $\frac{3}{4}$ pesos. ¿Cuánto es más costoso enviarlo por aire que por tierra?

- 5) El viaje en avión de la Cd. de México a Mexicali dura $3 \frac{1}{2}$ horas con escala en Guadalajara. El mismo viaje de regreso dura $2 \frac{3}{4}$ horas. ¿Cuál es la diferencia en tiempo entre el viaje de ida y el de regreso?
- 6) Un dispositivo para purificar agua fluye a razón de $60 \frac{1}{2}$ litros por hora. A esta razón ¿Cuántos litros producirá en $3 \frac{1}{4}$ horas?
- 7) El Teatro Salpinx tiene 300 asientos en palco y 540 asientos en luneta. En una función se ocuparon $\frac{2}{3}$ de los asientos en palco y $\frac{5}{6}$ de los asientos en luneta ¿Cuántos asientos quedaron desocupados?
- 8) Una muchacha gastó $\frac{2}{5}$ de su dinero en un vestido. Si el vestido costó \$ 150 pesos ¿Cuánto dinero tenía originalmente?
- 9) Un barril tiene una capacidad de 200 litros. Si el barril está lleno y se le extraen $28 \frac{3}{4}$ litros ¿Cuántos litros quedan en el barril?
- 10) Dos muchachos compraron unos patines entre los dos. Matuco puso \$ $36 \frac{1}{2}$ pesos y Agapito \$ $42 \frac{1}{4}$ pesos. Si los quieren vender y ganar \$ $15 \frac{3}{4}$ pesos ¿Cuál debe ser el precio de venta? ¿Cuánto le tocará de la ganancia a cada cual si se reparten proporcionalmente a su cantidad aportada?
- 11) Un tanque de agua de 200 litros es llenado usando una lata de $18 \frac{1}{2}$ litros ¿Cuántos viajes es necesario hacer para llenar el tanque?
- 12) Una mezcla contiene 3 kilogramos de sal y se disuelve en 45 litros de agua y otra contiene 7 litros y se disuelve en 106 litros de agua. Considerando que 1 litro de agua pesa 1 kilogramo ¿Cuál mezcla es más salada?
- 13) ¿Cuántos discos compactos puedo adquirir con \$ 675 pesos? Si cada disco compacto cuesta \$ $35 \frac{1}{2}$ pesos.
- 14) Un centro delantero anotó 15 goles en 17 partidos y otro anotó 49 goles en 55 partidos ¿Cuál jugador debe escoger el entrenador de acuerdo a su rendimiento?
- 15) Durante un período de clases, 0.375 de los estudiantes estudiaron aritmética, 0.25 estudiaron álgebra y 0.20 estudiaron ciencias sociales y los restantes 56 estudiantes estudiaron computación. Si ningún estudiante estudió en más de un área. ¿Cuántos estudiantes había por todos?

UNIDAD XXI

2.19) RAZONES Y PROPORCIONES

2.19.1) RAZONES

Una **razón** es una relación entre 2 cantidades. También se define como: el resultado de comparar dos cantidades de la misma especie.

Razón aritmética: es la diferencia entre dos cantidades, o sea, $a - b$ es una razón aritmética. Al primer termino a , se le llama antecedente y al segundo termino b , se le llama consecuente.

Razón geométrica: es el cociente indicado entre dos cantidades, o sea, a/b , o $a : b$, es una razón geométrica. Al primer término a , se le llama antecedente y al segundo término b , se le llama consecuente. Se determina dividiendo el primer número por el segundo. Por ejemplo la razón de 10 a 2, se puede escribir como $10/2$ o $10 : 2$ y sería igual a la razón 5 a 1 si le sacamos mitad.

→	$9 : 5$	←	$\frac{9}{5}$	←	Antecedente
Antecedente		Consecuente		Consecuente	

Una razón es una división indicada, es decir, una fracción; por lo tanto los principios válidos para las fracciones son válidos para las razones.

Las expresiones “en igual razón que”, “en la misma proporción que” y “proporcionalmente” son equivalentes.

Por ejemplo, si repartimos \$ 40 pesos entre 2 personas en la razón 3 a 5, de cada \$ 8 pesos, a una le tocan \$ 3 pesos y a la otra \$ 5 pesos. Por lo tanto a la primera le tocarán $3/8$ de \$ 40 pesos, o sea, \$ 15 pesos y a la otra $5/8$ de \$ 40 pesos, es decir, \$ 25 pesos. Note como \$15 / \$ 25 pesos están en la razón $3/5$, si sacamos quinta.

De la misma forma, una escala de un plano también es una razón, es decir, es una relación entre 2 longitudes y se define como:

Escala = Longitud en el Terreno / Longitud en el Plano.

Por ejemplo, si tengo una longitud en el terreno de 10 metros y deseo que quede representada por una longitud de 5 centímetros en el plano. ¿A que escala debo dibujar el plano?

Solución:

La escala no tiene dimensiones, es decir, no lleva unidades. Por esto tenemos que expresar ambas cantidades en las mismas unidades, ya sea en metros o en centímetros.

Recordando que 1 metro = 100 centímetros, es decir, para convertir metros a centímetros los multiplicamos por 100. Se obtiene:

Escala = $1\ 000\text{ centímetros} / 5\text{ centímetros} = 200$. Es decir, la escala debe ser 1:200, lo que significa que una unidad en el plano equivale a 200 unidades en el terreno.

Existen escalas que se utilizan para agrandar, en los cuales la relación se invierte. Por ejemplo, cuando dibujamos el plano de un reloj o cosas pequeñas, por ejemplo, la escala que se utiliza es 50 : 1, es decir, 50 unidades en el plano equivalen a 1 unidad en su tamaño real. Los microscopios electrónicos permiten aumentos o acercamientos de 200 000:1, es decir, la imagen vista es 200 000 veces mayor o ampliada que su tamaño real. Las cámaras de vídeo, por ejemplo, miden su capacidad de acercamiento en x, lo cual significa que si son de 16x, permiten amplificar o acercar la imagen de un objeto hasta 16 veces de su tamaño normal.

El valor de una razón no se altera cuando se suman o restan, multiplican o dividen, respectivamente sus términos por un mismo número.

En toda razón si al antecedente se le suma o resta, multiplica o divide por una cantidad, la razón aumenta o disminuye, queda multiplicada o dividida, respectivamente por dicha cantidad.

En toda razón si al consecuente se le suma o resta, multiplica o divide por una cantidad, la razón disminuye o aumenta, queda dividida o multiplicada por dicha cantidad respectivamente.

Ejemplos sobre la aplicación de las razones aritméticas y geométricas.

1) Cite 2 números cuya razón aritmética sea -4

R. $4 - 8 = -4$

2) Hallar la razón aritmética y geométrica de 25 y 50

R. Aritmética $25 - 50 = -25$

R. Geométrica $\frac{25}{50} = \frac{1}{2}$

3) El mayor de 2 números es 10, si su razón es 4 : 1, hallar el número menor.

Relacionamos el mayor de los números, con el número mayor de la relación y asignamos como x al número menor, relacionándolo con el número menor de la razón y despejamos a x .

$$\frac{10}{x} : \frac{4}{2} \quad x = \frac{(10)(1)}{4} = \frac{10}{4} = 2.5$$

El número menor es 2.5

4. Separar el número 54 en dos partes que estén en la razón 2 a 7.

Representando la razón como $2x$ y $7x$, tenemos:

$$\begin{aligned} 2x + 7x &= 54 \\ 9x &= 54 \\ x &= \frac{54}{9} = 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2(6) &= 12 \\ 7(6) &= 42 \end{aligned}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

1) Una habitación mide 9 metros de largo por 6 metros de ancho ¿Cuál es la razón largo-ancho?

Largo / ancho = 9 metros / 6 metros = $3 / 2$ o bien $3 : 2$

2) De 55 alumnos de un grupo solo concluyeron su bachillerato 33. ¿Qué tanto por ciento terminó? ¿Cuál es la razón entre los no egresados y el total de alumnos?

$$\begin{aligned} \text{Porcentaje de egresados} &= (\text{alumnos egresados} / \text{Total de alumnos}) \times 100 \\ &= (33 / 55) \times 100 = 60 \% \text{ de los egresados.} \end{aligned}$$

$$\text{Razón} = \text{Alumnos no egresados} / \text{Total de alumnos} = (55 - 33) / 55 = 22/55 = 2/5$$

Es decir, de cada 5 alumnos 2 no egresaron y 3 si lo hicieron.

3) El rendimiento de una máquina es la razón entre la energía útil (aprovechada) y la energía consumida (útil + perdida) y se suele expresar en tanto por ciento.

Esto es:

$\text{Rendimiento} = (\text{energía útil} / \text{energía consumida}) \times 100$

Si un motor consume 6 000 vatios de los que se aprovechan 5 400 ¿Cuál es su rendimiento?

$\text{Rendimiento} = (5\,400 \text{ vatios} / 6\,000 \text{ vatios}) \times 100 = 90 \%$. Es decir, un 10 % de la energía se desperdicia.

El rendimiento siempre es menor o igual que 100 %.

4) Una mezcla está formada de 8 partes de alcohol y 6 de agua ¿Cuántos litros de alcohol y de agua hay en 140 litros de la mezcla?

El número de partes es de 8 de alcohol + 6 de agua = 14.

De estas los 8/14 de 140 litros son de alcohol, es decir, 80 litros y los 6/14 de 140 litros son de agua, o sea, 60 litros.

Comprobación: 80 litros de alcohol + 60 litros de agua = 140 litros de mezcla.

5) Cuatro personas poseen terrenos colindantes con la misma calle, cuyo costo por pavimentarla fue de \$ 105 000 pesos. Si los frentes de cada terreno son de 25, 35, 50 y 75 metros ¿Cuánto le corresponde pagar a cada uno por la pavimentación?

El total de metros pavimentado fue de $25 + 35 + 65 + 85 = 210$ metros.

Primer terreno: $25/210$ de \$ 105 000 = \$ 12 500 pesos

Segundo terreno: $35/210$ de \$ 105 000 = \$ 17 500 pesos

Tercer terreno: $65/210$ de \$ 105 000 = \$ 32 500 pesos

Cuarto terreno: $85/210$ de \$ 105 000 = \$ 42 500 pesos



UNIDAD XXII

2.19.2) PROPORCIONES

Una proporción es la igualdad entre dos razones.

$\frac{3}{7}$	$=$	$\frac{9}{21}$	$3 - 7$	$=$	$9 - 21$
razón		razón		razón	razón
Proporción			Proporción		

Se representa por $a / b = c / d$ o también por $a : b = c : d$. Donde, a y d se les llama extremos, b y c se les denomina medios de la proporción. Es evidente que si: $a / b = c / d$, entonces $a d = b c$, es decir, **en toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios**.

En la proporción intervienen 4 cantidades, de las cuales sí se conocen 3, podemos hallar la cuarta cantidad. Por ejemplo, si en la proporción $3 : 12 = 9 : d$. Es claro que el producto de los extremos $3d$ debe ser igual al producto de los medios $12 \times 9 = 108$. Por lo tanto, $3d = 108$, o sea, $d = 108 / 3 = 36$.

PROPORCIÓN ARITMÉTICA O EQUIDIFERENCIA: Se define como igualdad entre dos razones aritméticas o diferencias.

TÉRMINOS DE UNA EQUIDIFERENCIA: En una proporción aritmética se llaman extremos al primero y cuarto términos y medios al segundo y al tercer términos.

$$\begin{array}{c}
 \text{Medios} \\
 \downarrow \quad \downarrow \\
 2 - 3 = 4 - 6 \\
 \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Extremos}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \frac{2}{3} - \frac{3}{2} = \frac{4}{6} - \frac{6}{4} \\
 \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \\
 \text{Medios} \\
 \text{Extremos}
 \end{array}$$

PROPORCIÓN ARITMÉTICA DISCRETA O NO CONTINUA: Es aquella que tiene sus cuatro términos diferentes o sus medios no son iguales.

Ejemplo:

a) $15 - 3 = 17 - 5$

b) $3 - 2 = 8 - 7$

PROPORCIÓN ARITMÉTICA CONTINUA: Es aquella que tiene sus términos medios iguales.

a) $3 - 2 = 2 - 5$

b) $7 - 4 = 4 - 5$

c) $8 - 9 = 9 - 7$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA PROPORCIÓN ARITMÉTICA: En toda proporción aritmética, la suma de sus extremos es igual a la suma de sus medios.

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA O EQUICOCIENTE: Se define como la igualdad entre dos razones geométricas o cocientes.

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA DISCRETA O NO CONTINUA: Es aquella que tiene sus cuatro términos diferentes o sus medios no son iguales.

$$\text{a) } \frac{12}{6} - \frac{24}{12} \quad \text{b) } \frac{15}{4} - \frac{20}{9} \quad \text{c) } 15 : 4 :: 20 : 9$$

PROPORCIÓN GEOMÉTRICA CONTINUA: Es aquella que tiene sus términos medios iguales.

a) $9 : 15 :: 15 : 25$

b) $3 : 9 :: 9 : 27$

c) $8 : 4 :: 4 : 2$

PROPIEDAD FUNDAMENTAL DE LA PROPORCIÓN GEOMÉTRICA: En toda proporción geométrica el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

CÁLCULO DE LA TERCERA PROPORCIONAL DE DOS NÚMEROS

La tercera proporcional es el primero o cuarto término de una proporción continua.

Para calcular la Tercera Proporcional de dos números dados, solo será necesario formular una proporción geométrica continua, colocando de término medio uno de los números dados y "x" como último entero.

Ejemplos: Hallar la tercera proporcional de 8 y 12.

$$\begin{aligned} \frac{8}{12} &= \frac{12}{x} \\ x &= \frac{(12)(12)}{8} \\ x &= \frac{144}{8} = 18 \quad \therefore 8/12 = 12/18 \end{aligned}$$

CÁLCULO DE LA CUARTA PROPORCIONAL DE 3 NÚMEROS DADOS

La cuarta proporcional es cualquiera de los cuatro términos de una proporción geométrica discreta o no continua.

Para calcular, solo es necesario formular una proporción geométrica discreta, colocando de último extremo a x .

Ejemplos:

$$\frac{20}{3} = \frac{5}{x} \quad x = \frac{(3)(5)}{20} = \frac{15}{20}$$

$$x = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\frac{12}{3,000} = \frac{20}{x} \quad x = \frac{20(3,000)}{12} = \frac{60,000}{12} = 50,000$$

2.19.3) REGLA DE TRES SIMPLE DIRECTA

Cuando deseamos hallar una cantidad a partir de 3 conocidas y que forman una proporción, se le conoce como Regla de Tres Simple y tiene bastantes aplicaciones prácticas. Para aplicarla, formamos dos columnas y colocamos en cada una de ellas las cantidades del mismo tipo, después multiplicamos cruzado y despejamos la cantidad desconocida.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

Si con 16 litros de gasolina un coche puede recorrer 288 kilómetros ¿Cuántos litros consumirá en 564 kilómetros?

16 litros	288 Km.
a litros	564 Km.

Multiplicando cruzado $16 \times 564 = 288 a$

Despejando, $a = 16 \times 564 / 288 = 31.33$ litros.

¿Cuánto cuestan 9 kilogramos de dulces si 5 kilogramos cuestan \$ 450 pesos?

5 Kg.	\$ 450 pesos
9 Kg.	a pesos

Multiplicando cruzado $5a = 9 \times 450$

Despejando, $a = 9 \times 450 / 5 = \$ 810$ pesos.

Si 18 libros cuestan \$ 5 832 pesos ¿Cuánto cuestan 4 docenas de libros del mismo tipo?

Recordando que una docena = 12 unidades, por lo tanto, 4 docenas = $4 \times 12 = 48$.

18 libros	\$ 5 832 pesos
48 libros	a pesos

Multiplicando cruzado $18a = 48 \times 5\,832$

Despejando, $a = 48 \times 5\,832 / 18 = \$ 15\,552$ pesos.

2.19.4) REGLA DE TRES SIMPLE INVERSA

Existen proporciones inversas, en las cuales al aumentar una cantidad debe disminuir la otra para conservar la proporción.

Por ejemplo, Si 15 hombres realizan un trabajo en 36 días, ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo trabajo si contasen con 9 hombres más?

Es evidente, que si el número de hombres se aumenta en 9, es decir, a 24 hombres, deben tardar menos tiempo en hacer el mismo trabajo. Como una cantidad aumenta y la otra debe disminuir, se trata de una proporción inversa. Para formarla es necesario colocar en diagonal las razones dadas.

Esto es,

15 hombres	a días
24 hombres	36 días

Multiplicando cruzado $15 \times 36 = 24a$

Despejando, $a = 15 \times 36 / 24 = 22.5$ días.

Otro ejemplo, Si 6 hombres realizan una excavación en 9 días, ¿Cuánto tiempo tardarán en hacer el mismo trabajo si se quitan 2 hombres?

Es evidente, que si el número de hombres se disminuye en 2, es decir, a 4 hombres, deben tardar más tiempo en hacer el mismo trabajo. Como una cantidad aumenta y la otra debe disminuir, se trata de una proporción inversa. Para formarla es necesario colocar en diagonal las razones dadas.

Esto es,

6 hombres	a días
4 hombres	9 días

Multiplicando cruzado $9 \times 6 = 4 a$
Despejando, $a = 9 \times 6 / 4 = 13.5$ días.



Ejercicio 22

Resuelva los siguientes problemas de aplicación práctica relativos a razones y proporciones:

- 1) Un auto viajó 192 kilómetros en 3 horas. A la misma velocidad ¿Cuánto tiempo se llevará para viajar 352 kilómetros?
- 2) Si 8 manzanas cuestan \$ 12 pesos ¿Cuánto costarán 9 docenas de manzanas?
- 3) En un mapa $\frac{3}{4}$ de centímetro representa 7.5 metros en el terreno ¿Qué longitud representa $\frac{1}{2}$ centímetro?
- 4) ¿Cuál es la escala utilizada en un mapa si 500 metros de un terreno se representan por 2.50 centímetros?
- 4) En una clase de aritmética, los alumnos y el maestro acordaron que la calificación fuera proporcional al número de ejercicios resueltos correctamente. Si Matuco realizó correctamente 80 ejercicios y obtuvo una calificación de 9 ¿Qué calificación obtendrá Lucyana si realizó correctamente 88 ejercicios?



UNIDAD XXIII

2.20) TANTO POR CIENTO

También, se le denomina porcentaje y nos indica el número de partes que tomamos de cada 100. Se representa por %.

Así, 3 % significa que se toman 3 partes de cada 100, y es igual a $3/100 = 0.03$.

Las cantidades en tanto por ciento son muy utilizadas. En las tiendas de autoservicio es muy frecuente ver “Todos los artículos escolares al 20 % de descuento”. Los bancos y en los comercios también se trabaja generalmente con porcentajes. Es muy general su uso en estadísticas de todo tipo, tanto deportivas, como económicas, sociales, etc. De ahí la importancia de dominar bien este sencillo tema.

El tanto por ciento o porcentaje también puede expresarse como fracción, por ejemplo, $3/5 = 0.6 = 60/100 = 60\%$. De la misma forma $1/5 = 0.2 = 20/100 = 20\%$.

Para hallar el porcentaje de una cantidad, simplemente multiplicamos el tanto por ciento por la cantidad y el resultado lo dividimos entre 100.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA DE TANTO POR CIENTO

- 1) Hallar el 5 % de \$ 2 500 pesos.

Solución: $5 \times 2\,500 / 100 = 12\,500 / 100 = \$ 125$ pesos

- 2) Hallar el 7.5 % de \$ 6 612 pesos

Solución: $7.5 \times 6\,612 / 100 = 49\,590 / 100 = \$ 495.90$ pesos

- 3) En la tienda “Salpinx” un pantalón de mezclilla lo venden en \$ 195 pesos con un 15 % de descuento. Si otra tienda el mismo pantalón lo vende a \$ 170 pesos. ¿En cual tienda nos conviene comprar el pantalón?

El 15 % de descuento de \$195 pesos, es igual a, $15 \times 195 / 100 = \$ 29.25$ pesos
Por lo que el precio de venta en “Salpinx” es de \$ 195 pesos - \$ 29.25 pesos = \$165.75 pesos. Por lo que en esta tienda conviene comprar el pantalón.

- 4) Un refresco en 1974 costaba \$ 0.80 pesos, si actualmente cuesta \$ 3.60 pesos. ¿Cuál ha sido el porcentaje de incremento?

Incremento de precio = Precio final - Precio inicial = \$ 3.60 - \$ 0.80 = \$ 2.80 pesos

Porcentaje de incremento = $(\text{Incremento} / \text{Precio inicial}) \times 100 = 2.80 / 0.80 \times 100 = 350 \%$. Es decir, su precio se ha incrementado 3.5 veces.

5) La población de Acapulco pasó de 543 508 a 687 893 habitantes, mientras que en el mismo lapso la población de Chilpancingo pasó de 98 903 a 175 357 habitantes. ¿Qué incremento de población fue mayor?

Solución:

Para Acapulco,

Su incremento de población fue de = Población final – Población inicial
 $= 687\,893 - 543\,508 = 144\,385$ habitantes

Porcentaje de incremento de población = $(\text{Incremento de Población} / \text{Población inicial}) \times 100 = 144\,385 / 543\,508 \times 100 = 26.57 \%$

Para Chilpancingo,

Su incremento de población fue de = Población final – Población inicial
 $= 175\,357 - 98\,903 = 76\,454$ habitantes

Porcentaje de incremento de población = $(\text{Incremento de Población} / \text{Población inicial}) \times 100 = 76\,454 / 98\,903 \times 100 = 77.30 \%$

Salta a la vista, que en este mismo lapso, a pesar de que Acapulco creció más en número de habitantes su porcentaje de crecimiento fue menor que el de Chilpancingo.

6) Un libro cuesta \$ 250 pesos y tiene un 12 % de descuento. Si a la hora de pagar en cajas nos hacen un descuento adicional del 5 %, una vez que ha sido hecho el de 12 %. ¿Cuánto se pagó por el libro?

Solución:

Descuento inicial del 12 % = $12 \times 250 / 100 = \$ 30$ pesos

Su precio con descuento inicial es de $\$ 250 - \$ 30 = \$ 220$ pesos

Descuento adicional del 5 % = $5 \times 220 / 100 = \$ 11$ pesos

Precio que se pagó por el libro = $\$ 220 - \$ 11 = \$ 209$ pesos

7) Se desea instalar la tubería para llevar agua potable a la Colonia Guerrero distante a 1200 metros del depósito de agua más cercano. Si por cada acoplamiento de un tramo de tubo de 6 metros, se pierden 8 centímetros. ¿Hallar el número de tramos de tubo que se necesita comprar?

Si no hubiera desperdicio, el número de tramos de tubo sería:
 $= \text{Longitud de la tubería en metros} / \text{longitud del tramo de tubo}$

$$= 1200 \text{ metros} / 6 \text{ metros} / \text{tramo} = 200 \text{ tramos de tubo.}$$

Es evidente que por el desperdicio, el número de tramos de tubo será un poco mayor.

Recordando que 8 centímetros = 0.08 metros

$$\begin{aligned} \text{El \% de desperdicio es} &= (\text{desperdicio por tramo} / \text{longitud del tramo}) \times 100 \\ &= (0.08 \text{ metros} / 6 \text{ metros} / \text{tramo}) \times 100 = 1.33 \% \end{aligned}$$

Por lo tanto, en este porcentaje se tiene que aumentar el número de tramos.

$$\text{Número adicional de tramos} = 1.33 \times 200 \text{ tramos de tubo} / 100 = 2.67 \text{ tramos}$$

Es decir, se tienen que adquirir un total de 203 tramos de tubo.

8) La pendiente o inclinación de un camino, una vía de ferrocarril o de una techumbre se da en porcentaje. Así, una pendiente del 2 %, significa que sube o baja 2 metros por cada 100 metros. Si una pendiente es del 1.25 % ¿Cuánto se asciende en 2.5 kilómetros?

$$\text{Ascenso} = \text{pendiente} \times \text{Distancia} / 100 = 1.25 \times 2500 \text{ metros} / 100 = 31.25 \text{ metros}$$

9) La altitud sobre el nivel medio del mar de Acapulco es 0 metros y de Chilpancingo es de 1080 metros, si la distancia entre estas 2 ciudades es de 105 kilómetros. ¿Cuál es la pendiente promedio de una ciudad a otra?

$$\text{Pendiente} = (\text{Desnivel} / \text{Distancia}) \times 100$$

$$\text{Desnivel} = \text{altura final} - \text{altura inicial} = 1080 \text{ metros} - 0 \text{ metros} = 1080 \text{ metros}$$

$$\text{Distancia} = 105 \text{ kilómetros} = 105\,000 \text{ metros}$$

Por lo tanto, la pendiente es igual a $=(1080 / 105\,000) \times 100 = 1.03 \%$, es decir, se ascienden de Acapulco a Chilpancingo 1 metro por cada 100 metros recorridos.



Ejercicio 23

Resuelva los siguientes problemas de aplicación práctica relativos a tanto por ciento:

1) Si el 58 % de los estudiantes viven cerca del CBTis y el 35 % viven lejos pero dentro de la ciudad ¿Qué porcentaje de los estudiantes vive fuera de la ciudad?

- 2) En 10 años la población de Cd. Altamirano pasó de 25 676 a 42 364 habitantes. ¿Cuál es el porcentaje de incremento de la población?
- 3) En 18 años la matrícula del CBTis pasó de 400 a 2 080 alumnos inscritos. ¿Cuál es el porcentaje de incremento de la matrícula?
- 4) En un año Federico cobró de honorarios la cantidad de \$ 120 800 pesos. Si pagó a la Secretaría de Hacienda por concepto de impuestos la cantidad de \$ 16 480 pesos ¿Cuál es el porcentaje de impuestos con relación a los ingresos?
- 5) Dos hombres rentan un campo de pastura por \$ 3600 pesos. Si uno pone 8 vacas y el otro 12 ¿Qué tanto de renta debe pagar cada cual?
- 6) Un comerciante redujo el precio de un par de tenis que no vendía, de \$ 360 pesos a \$ 220 pesos. ¿Cuál es el porcentaje de descuento respecto al precio original?
- 7) En un viaje de 500 kilómetros, el papá manejó 280 kilómetros y en el resto manejó el hijo. ¿Qué porcentaje del viaje manejó el hijo?



UNIDAD XXIV

2.21) LOGARITMOS

Logaritmo, es el exponente o potencia a la que un número fijo, llamado *base*, se ha de elevar para dar un número dado.

Por ejemplo, en la expresión $10^3 = 1000$, el logaritmo de 1000 en base 10 es igual a 3. Esto se escribe como $\text{Log}_{10} 1000 = 3$. Los logaritmos fueron originalmente inventados para simplificar los procedimientos aritméticos de potencias y extracción de raíces, ya que mediante ellos, la potenciación se convierte en multiplicación, y la radicación en división. Actualmente tienen muchas aplicaciones tanto en las matemáticas puras como en las aplicadas.

En matemáticas se utilizan principalmente dos tipos de logaritmos: Los logaritmos naturales o científicos y los logaritmos decimales o vulgares. Los primeros utilizan como base al número $e = 2.71828182845904523\ldots$ y se representan por Ln . Los decimales usan como base el número 10, al igual como nuestro sistema de numeración y se representan por Log . La base tiene que ser distinta de la unidad, es decir, el menor número base tiene que ser 2 o mayor.

Las primeras tablas de logaritmos naturales fueron publicadas por separado por el matemático escocés *John Napier* en 1614 y por el suizo *Justus Byrgius* en 1620. Por esta razón, también se le llaman logaritmos neperianos. La primera tabla de logaritmos decimales, también llamados comunes o vulgares fue compilada por el matemático inglés *Henry Briggs*.

Un antilogaritmo es la base elevada a la potencia del número dado. Por ejemplo, el antilogaritmo de 4 en base 10 es $10^4 = 10\,000$. El antilogaritmo es el resultado de la operación de potenciación. En los logaritmos naturales se representa por e^x y en los decimales por 10^x .

El logaritmo de un número se compone de una parte entera y una decimal. A la parte entera se le llama característica y a la decimal mantisa. Si el número al que se le busca logaritmo es mayor que la base, su característica es positiva y si es menor, entonces es negativa. La mantisa siempre es positiva.

Ejemplos:

- 1) Logaritmo decimal de $2362.65 = 3.373399$. Su característica es 3 y su mantisa es 0.373399. La característica de un número positivo es igual al número de cifras enteras disminuido en 1, en este caso $4 - 1 = 3$.
- 2) Logaritmo decimal de $0.0026627 = -2.574677$. Su característica es -2 y su mantisa es 0.574677. Con calculadora, la característica de un número negativo es

igual al número de ceros después del punto decimal y es negativa, en este caso es -2 . Con tablas, la característica de un número negativo es negativa e igual al número de ceros después del punto decimal aumentado en 1, en este caso $-(2 + 1) = -3$. La mantisa siempre es positiva.

2.20.1) PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

En virtud de que los logaritmos son exponentes, en ellos se aplican las mismas reglas de la exponenciación o potenciación.

En general, si tomamos como base de los logaritmos el número x , entonces por definición:

$$\text{Log}_x N = n \quad \text{sí y sólo sí} \quad x^n = N \quad (\text{L1})$$

Ejemplos:

$\text{Log}_2 64 = 6$	ya que $2^6 = 64$
$\text{Log}_4 64 = 3$	ya que $4^3 = 64$
$\text{Log}_8 64 = 2$	ya que $8^2 = 64$
$\text{Log}_{16} 64 = 3/2$	ya que $16^{3/2} = (16^{1/2})^3 = 4^3 = 64$
$\text{Log}_{32} 64 = 6/5$	ya que $32^{6/5} = (32^{1/5})^6 = ((2^5)^{1/5})^6 = 2^6 = 64$
$\text{Log}_{64} 64 = 1$	ya que $64^1 = 64$

También, $\text{Log}_x 1 = 0$ ya que $x^0 = 1$, siempre que x sea diferente de 0.

Ejemplos: utilizando la definición de logaritmo

1) Hallar el valor de A si $\text{Log}_5 A = 3$

Solución: como la base es 5 y el logaritmo(exponente) es 3, se tiene que $5^3 = A$, por lo tanto $A = 5 \times 5 \times 5 = 125$

2) Hallar el valor de la base x si $\text{Log}_x 1024 = 5$

Solución: como la base es x y el logaritmo(exponente) es 5, se tiene que $x^5 = 1024$,

Por lo tanto:

$$x = \sqrt[5]{1024} = 4$$

Comprobación: $4^5 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 1024$

3) Hallar el valor del logaritmo a si $\text{Log}_{32} 2 = a$

Solución: como la base es 32 y el logaritmo(exponente) es a, se tiene que $32^a = 2$,

Y como $32^{1/5} = 2$, se concluye que $a = 1/5$

2.20.2) LOGARITMO DE UN PRODUCTO

Sean A y B dos números cuyo producto es AB.

$$\text{Entonces } \log_x AB = \log_x A + \log_x B. \quad (L2)$$

Demostración:

Tomando como base de los logaritmos al número x, se tiene:

$$\log_x A = a \quad \text{y} \quad \log_x B = b$$

Entonces, por (L1), se tiene

$$A = x^a \quad \text{y} \quad B = x^b$$

Por lo tanto,

$$AB = (x^a)(x^b) = x^{a+b} \quad \text{y} \quad \log_x AB = a + b$$

$$\text{Entonces:} \quad \log_x AB = \log_x A + \log_x B.$$

Que se enuncia: el logaritmo de un producto de dos números positivos es igual a la suma de los logaritmos de cada uno de los factores.

Nota como mediante el uso de logaritmos, la operación se transforma en suma.

De la misma forma, para tres factores se obtiene:

$$\log_x ABC = \log_x A + \log_x B + \log_x C \quad (L3)$$

Anteriormente, para calcular los logaritmos se recurría a las tablas matemáticas. Actualmente, se utilizan la calculadora científica o la computadora. Aunque todavía pueden utilizarse las tablas matemáticas para tal fin. En los ejemplos de este tema utilizaremos la calculadora científica y los logaritmos decimales.

Ejemplos:

1) Utilizando logaritmos evaluar $6\,584 \times 373$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 6\,584 \times 373 &= \log 6\,584 + \log 373 \\ 3.8184898 + 2.57170883 &= 6.39019863 \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{6.39019863} = 2455831.86$. En virtud de que ambos factores no tienen decimales, debemos dar la respuesta redondeada a enteros, es decir, 2 455 832.

2) Utilizando logaritmos evaluar 148.25×4562.84

$$\begin{aligned}\text{Solución: } \log 148.25 \times 4562.84 &= \log 148.25 + \log 4562.84 \\ &= 2.17099470 + 3.65923524 = \\ &= 5.83022994\end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{5.83022994} = 676\,441.0266$. En virtud de que ambos factores tienen 2 decimales, debemos dar la respuesta con $2 + 2 = 4$ decimales.

3) Utilizando logaritmos evaluar 0.03657×0.005845

$$\begin{aligned}\text{Solución: } \log 0.03657 \times 0.005845 &= \log 0.03657 + \log 0.005845 \\ &= -1.43687504 + -2.23321548 = \\ &= -3.67009052\end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{-3.67009052} = 0.00021375165$. Debemos dar la respuesta con un número de decimales, igual a la suma de decimales de los factores, $5 + 6 = 11$ decimales.

2.20.3) LOGARITMO DE UN COCIENTE

Sean A y B dos números cuyo cociente es A / B .

$$\text{Entonces } \log_x A / B = \log_x A - \log_x B. \quad (L4)$$

Demostración:

Tomando como base de los logaritmos al número x, se tiene:

$$\log_x A = a \quad \text{y} \quad \log_x B = b$$

Entonces, por (L1), se tiene

$$A = x^a \quad \text{y} \quad B = x^b$$

Por lo tanto,

$$A/B = x^a / x^b = x^{a-b}$$

$$\text{Y } \log_x A / B = a - b$$

Entonces:

$$\log_x A / B = \log_x A - \log_x B.$$

Que se enuncia: el logaritmo de un cociente de dos números positivos es igual al logaritmo del dividendo menos el logaritmo del divisor.

Nota como mediante el uso de logaritmos, la operación se transforma en resta.

Ejemplos:

1) Utilizando logaritmos evaluar $6\,584 / 373$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 6\,584 / 373 &= \log 6\,584 - \log 373 \\ 3.8184898 - 2.57170883 &= 1.24678097 \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{1.24678097} = 17.6515$.

2) Utilizando logaritmos evaluar $4562.84 / 148.25$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 4562.84 / 148.25 &= \log 4562.84 - \log 148.25 \\ 3.65923524 - 2.17099470 &= \\ 1.48824054 & \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{1.48824054} = 30.7780$.

3) Utilizando logaritmos evaluar $0.03657 / 0.005845$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 0.03657 / 0.005845 &= \log 0.03657 - \log 0.005845 \\ &= -1.43687504 - (-2.23321548) = \\ 0.79634044 & \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{0.79634044} = 6.25663$.

2.20.4) LOGARITMO DE UNA POTENCIA

Sean A y p dos números cuya potencia es A^p

$$\text{Entonces } \log_x A^p = p \log_x A \quad (L5)$$

Demostración:

Tomando como base de los logaritmos al número x,

Si ambos miembros de $A = x^a$ se elevan a una misma potencia p , se obtiene:

$$A^p = (x^a)^p = x^{a \cdot p}$$

$$\text{De aquí que, } \log_x A^p = x^{a \cdot p}$$

Por lo tanto:

$$\log_x A^p = p \log_x A$$

Que se enuncia: el logaritmo de una potencia de un número positivo es igual al producto del exponente de la potencia por el logaritmo del número.

Nota como mediante el uso de logaritmos, la operación se transforma en multiplicación.

Ejemplos:

1) Utilizando logaritmos evaluar 65.84^3

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 65.84^3 &= 3 \log 65.84 \\ &= 3 (1.8184898) = 5.4554694 \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{5.4554694} = 285\,410.14$.

2) Utilizando logaritmos evaluar $148.25^{2.75}$

$$\begin{aligned} \text{Solución:} \quad \log 148.25^{2.75} &= 2.75 \log 148.25 \\ &= 2.75 (2.17099470) = 5.970235425 \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{5.970235425} = 933\,760.3421$.

3) Utilizando logaritmos evaluar $10.365^{0.85}$

$$\begin{aligned} \text{Solución: } \log 10.365^{0.85} &= 0.85 \log 10.365 \\ &= 0.85 (1.01556930) = 0.863233905 \end{aligned}$$

Ahora utilizando antilogaritmo, queda $10^{0.863233905} = 7.2985$.

2.20.5) LOGARITMO DE UNA RAÍZ

En virtud, que las raíces son potencias con exponentes fraccionarios, se aplica en forma similar, la propiedad de los logaritmos para una potencia.

O sea:

$$\log_x \sqrt[r]{A} = \log_x A^{\frac{1}{r}} = \frac{1}{r} \log_x A = \frac{\log_x A}{r} \quad (L6)$$

Que se enuncia: el logaritmo de una raíz de un número positivo es igual al logaritmo del número dividido entre el tipo de raíz.

Nota como mediante el uso de logaritmos, la operación se transforma en una división.

Ejemplos:

1) Hallar $\sqrt[3]{1999}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[3]{1999} &= \log 1999^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3} \log 1999 = \frac{\log 1999}{3} \\ &= \frac{3.3008128}{3} = 1.100270933 \end{aligned}$$

Utilizando antilogaritmo, $10^{1.100270933} = 12.597$

2) Hallar $\sqrt[7]{12376.23}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[7]{12376.23} &= \log 12376.23^{\frac{1}{7}} = \frac{1}{7} \log 12376.23 = \frac{\log 12376.23}{7} \\ &= \frac{4.0925883}{7} = 0.58465548 \end{aligned}$$

Utilizando antilogaritmo, $10^{0.58465548} = 3.84287$

3) Hallar $\sqrt[5]{2356.73}$

$$\begin{aligned} \log \sqrt[5]{2356.73} &= \log 2356.73^{\frac{1}{5}} = \frac{1}{5} \log 2356.73 = \frac{\log 2356.73}{5} \\ &= \frac{3.3723098}{5} = 0.674462 \end{aligned}$$

Utilizando antilogaritmo, $10^{0.674462} = 4.7257$



Ejercicio 24

Utilizando logaritmos, evaluar las expresiones siguientes:

- 1) $(2.75)^{3.25}$
- 2) $(345.765)(234.92)$
- 3) $\frac{(355)(4.36 - 2)}{2.73}$
- 4) $(2.65)^{4.75} (18.46)^{3.92}$
- 5) $\sqrt[5]{2762}$
- 6) $\sqrt[4]{354 \times 273}$
- 7) $\sqrt[10]{\frac{245 \times 278}{2542}}$

EJEMPLOS ADICIONALES DEL CAPITULO DE Aritmética

1) Una máquina de pantimedias tiene una capacidad de producción de 35 docenas de pares por hora. ¿En una semana, Cuántas docenas de pares pueden ser producidas por 3 de éstas máquinas si trabajan 40 horas a la semana?

Como trabajan 40 horas a la semana, una máquina puede producir
 $= 35 \text{ docenas / hora} \times 40 \text{ horas / semana} = 1\,400 \text{ docenas / semana}$

Por lo tanto, 3 máquinas producirán :

$= (1\,400 \text{ docenas / semana}) / \text{máquina} \times 3 \text{ máquinas} = 4\,200 \text{ docenas de pares a la semana.}$

2) Un cierto comercial de televisión es mostrado 34 veces al día y 18 veces por la noche. ¿Cuántas veces se exhibe a la semana?

Solución: se exhibe $(34 + 18)$ veces / día, por lo tanto, en una semana se exhibe $(34 + 18)$ veces / día $\times 7$ días. Sumando primeramente lo que está entre paréntesis, después multiplicando:

$= (52) \text{ veces / día} \times 7 \text{ días} = 364 \text{ veces por semana.}$

3) Un submarino se sumerge a 135 metros. Un poco mas tarde sube 43 metros. Encuentre la profundidad actual del submarino respecto a su posición inicial.

Considerando negativo cuando se sumerge y positivo cuando emerge o sube. Se tiene:

$$-135 + 43 = -92. \text{ Es decir, se encuentra sumergido a 92 metros.}$$

4) Matuco en su cuenta de cheques tiene un saldo de - \$ 45.50 pesos. Si deposita \$ 184 pesos ¿Cuál es su nuevo saldo?

$$-45.50 + 184 = +138.5. \text{ Es decir, tiene un saldo positivo de \$138.50 pesos.}$$

EXAMEN FINAL DEL CAPITULO DE Aritmética

1) A lo largo de un camino recto, Arcelia está localizada a 64 kilómetros de Tlapehuala y ésta se localiza a 24 kilómetros de Cd. Altamirano. Si las señales de kilometraje deben ser colocadas de acuerdo a las siguientes condiciones:

- Una señal debe estar en cada pueblo
- La distancia entre 2 señales debe ser la misma.
- Las señales consecutivas deben estar lo más lejanas posibles.

¿Qué tan distantes debe estar una señal de otra?

Resuélvalo utilizando el MCD

2) Esmeralda pesa 64 kilogramos y está siguiendo una dieta para bajar de peso. Si la primera semana bajó 3 kilogramos, la segunda semana ganó 1.5 kilogramos, la tercera perdió 2.5 kilogramos y la cuarta semana bajó 4 kilogramos. ¿Cuál es su peso actual?

3) En virtud de que hay usuarios morosos, la Junta Local de Agua Potable pierde \$ 35 680 pesos por cada día que no recibe pago. ¿Qué pérdida tendrá en 5 días? Si la pérdida no debe rebasar de \$ 780 000 pesos antes de declararse en bancarrota ¿Cuántos días como máximo soportará este ritmo de pérdidas antes de declararse en bancarrota?

4) Un elevador viaja del tercero al onceavo piso y otro viaja del noveno al segundo piso. ¿Qué elevador hizo el viaje más largo?

5) Si Kendy tiene en su cuenta de cheques la cantidad de \$ 1225 pesos y quiere disponer de \$ 205 pesos cada mes durante 6 meses ¿Podrá hacerlo sin que haga ningún depósito?

- 6) En Tierra Caliente a las 10 de la mañana la temperatura es de 22°C . Si la temperatura aumenta a razón de $1\frac{3}{4}^{\circ}\text{C}$ cada hora. ¿Qué temperatura habrá a las 3 de la tarde?
- 7) Para obtener un empleo gubernamental es necesario obtener un promedio general al menos de 8.5 en una serie de 3 exámenes. Si en los dos primeros obtuvo 7.5 y 8.3 ¿Qué calificación necesita obtener en el tercer examen para lograr el promedio mínimo?

TE FELICITO POR HABER TERMINADO LA PRIMERA ETAPA PARA DOMINAR LAS MATEMÁTICAS. ERES SENSACIONAL Y UNA PERSONA EN EL CAMINO DEL ÉXITO.



RECUERDA QUE LAS REGLAS PARA TENER ÉXITO EN EL ESTUDIO DE ESTE LIBRO SON LAS SIGUIENTES:

- 1) Estudia concienzudamente cada tema, hasta su perfecta comprensión. Estudia una unidad por día hasta terminar el libro.
- 3) Resuelve correctamente todos los ejercicios antes de pasar al tema siguiente.
- 4) Lee con cuidado las explicaciones y conceptos. Después, haz de nuevo en tu cuaderno los ejemplos que vienen resueltos en el texto, de forma que comprendas perfectamente el principio general en que se basan o que se aplica.
- 5) Estudia cada regla, hasta que pueda ser escrita con tus propias palabras.
- 6) Grábala firmemente en la memoria.
- 7) Si tienes alguna duda repasa el tema completo. Después de un tiempo puede ser necesario que repases todo el capítulo.
- 8) Para conservar tu confianza y tu autoestima vuleve a leer las unidades del capítulo I de Motivación.

CAPÍTULO III

ÁLGEBRA

“Lo que haces habla tan fuerte, que no puedo escuchar lo que dices” Ralph Waldo Emerson

“Sabiduría ante todo adquiere sabiduría; Y ante toda tu posesión adquiere inteligencia. Engrandécela, y ella te engrandecerá, ella te honrará cuando tú la hubieres abrazado. Adorno de gracia dará a tu cabeza, Corona de hermosura te entregará” Proverbios 4:7-9

“Mejor es adquirir sabiduría que el oro preciado; y adquirir inteligencia vale más que la plata” Proverbios 16:16

UNIDAD I

INTRODUCCIÓN

Los primeros cursos de matemáticas en las escuelas secundarias y de bachillerato comprenden el álgebra, como parte fundamental de las ciencias matemáticas. **El álgebra contiene los conceptos básicos para la comprensión de todos los temas más avanzados de matemáticas.** En el edificio matemático constituye el nivel que sigue después de la Aritmética.



Los fundamentos del álgebra, además de los de aritmética, deben entenderse bien antes de aprender las matemáticas necesarias en cualquier campo científico o técnico. Es necesario **trabajar arduamente** con los fundamentos para poder dominarlos, obteniéndose grandes beneficios de este esfuerzo en el futuro, cuando trabajes con

matemáticas superiores.

3.1) DEFINICIÓN

El álgebra se define como la rama de las matemáticas que se encarga del estudio, operaciones y aplicaciones de las cantidades del modo más general posible. Es decir, además de los números, para representar cantidades utilizaremos las letras del alfabeto. *Donde una letra nos representará muchos valores numéricos*; a diferencia, por ejemplo del número 10, que siempre será diez unidades.

Esta rama de las matemáticas, estudia las cantidades de una forma muy amplia, ya que puede combinar números y letras para representar los valores numéricos, ampliándose así el campo de estudio de las matemáticas y representando de una mejor manera el mundo real. Por esta razón, **sirve de base a las matemáticas superiores.**

En álgebra usamos símbolos para representar cantidades. Es importante aprender el significado y uso de cada signo y símbolo para entender el lenguaje matemático, cuyo lenguaje en general, es el lenguaje algebraico. **Si no conocemos y dominamos el lenguaje no podremos aprender.**

Los **números** se utilizan para representar cantidades conocidas, determinadas y fijas. Por ejemplo: 1, 4, 9, -90, -5, -7, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, π , etc.

Las **letras** se utilizan para representar todo tipo de cantidades, ya sean constantes o variables. En álgebra a las letras también se les llama **literales**.

Constantes : Son los valores conocidos y cuyo valor no cambia en el desarrollo de un problema. Se representan por las *primeras letras del alfabeto*: {a, b, c, d, e, f, g, h}.

Variables : Son los valores desconocidos (incógnitas) y que pueden adquirir muchos valores en el desarrollo de un problema. Se representan por las *últimas letras del alfabeto*: {i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z}.

Toma en cuenta que cuando usamos las letras en las expresiones, ellas **nos representan números** y no son sólo símbolos abstractos. Tales letras siempre nos representarán números del sistema de números reales. Por ejemplo, el producto **ab**, es el producto del número real **a** por el número real **b** y no el producto de una letra por otra. **El álgebra no es el estudio de las letras, sino de las cantidades que éstas representan.**

El lenguaje de las matemáticas es un lenguaje universal; todos los símbolos matemáticos tienen el mismo significado, aunque el idioma sea diferente. Para dominar las matemáticas necesitamos conocer su lenguaje, ya que muchos estudiantes fallan en el aprendizaje y la comprensión del lenguaje matemático y de ciertas reglas y leyes esenciales, así como en sus

definiciones. Debe entenderse que no hay atajos para aprender esta asignatura de gran importancia, así que hay que prepararse para trabajar con gran esfuerzo y decisión. Las matemáticas es una ciencia que sólo se aprende haciendo, es decir, resolviendo muchos ejercicios o problemas.

La principal y al mismo tiempo la más simple causa del fallo en entender y apreciar las matemáticas, es el no entender los símbolos, las definiciones ni la terminología empleada. En matemáticas más que en ninguna otra asignatura, cada palabra utilizada tiene un significado fijo y definido.

El álgebra es efectivamente una *continuación de la aritmética*, pues también trata de las cantidades, aunque lo hace de una forma más general, ya que para representarlas, utiliza tanto letras como números positivos y negativos, **a diferencia de la aritmética que solo usa números**. En el estudio del álgebra aprenderás nuevos métodos, más sencillos y más útiles para resolver problemas. Ocasionalmente, encontrarás nuevos signos y símbolos utilizados para representar nuevas ideas y procesos.

En las tablas siguientes se muestran las operaciones aritméticas y su operación algebraica equivalente, se ve claramente que el álgebra es una generalización de la aritmética y que necesitamos dominarla para poder dominar el álgebra y las matemáticas en general. Las operaciones en álgebra se hacen en forma similar que en aritmética, de ahí la importancia de primero dominar las operaciones aritméticas y después las operaciones algebraicas.

OPERACIONES IGUALES

ARITMÉTICA		ÁLGEBRA	
321	+	$3a^2+2a+1$	+
257		$2a^2+5a+7$	
-----		-----	
578		$5a^2+7a+8$	

ARITMÉTICA		ÁLGEBRA	
321	$\times$	$3a^2+2a+1$	$\times$
..31		$3a+1$	
-----		-----	
963		$9a^3+6a^2+3a$	
..321		 $3a^2+2a+1$	
-----		-----	
9951		$9a^3+9a^2+5a+1$	

El estudiante debe ya dominar los temas que vimos en el capítulo de Aritmética: Tablas de multiplicar y de sumar, operaciones básicas con números enteros, operaciones básicas con números decimales, operaciones básicas con números fraccionarios. **Si no dominas estos temas tan sencillos, debes repasarlos hasta aprenderlos, porque de no hacerlo se te dificultará el aprendizaje de las matemáticas y te parecerán difíciles porque no dominas lo fácil.** Si consideras que estos temas no los dominas, urgentemente repásalos nuevamente.

El hecho de utilizar letras para representar números, ha permitido que las matemáticas y por lo tanto la ciencia, hayan tenido un desarrollo tan impresionante. Ya que de esta manera, podemos mediante fórmulas representar los fenómenos físicos, químicos, biológicos, económicos, sociales y todo aquello que represente al mundo real.

Fórmula: Es la representación mediante literales de una regla, un principio, una propiedad o una relación que existe en el mundo real.

Por ejemplo, el área (A) de un triángulo es igual al producto de la base (b) por la altura (h) dividido entre 2. Algebraicamente se representaría por:

$$A = \frac{b \times h}{2}$$

También, el área (A) de un círculo se expresa como el producto de pi (π) por su radio (r) al cuadrado. Algebraicamente se representaría por:

$$A = \pi \times r^2$$

Otro ejemplo, la fuerza de atracción (F) entre dos planetas de masas (m_1) y (m_2) es igual al producto de las masas (m_1 y m_2) por la constante de gravitación universal (G) y dividido entre el cuadrado de la distancia (d) que los separa. Algebraicamente se representaría por:

$$F = G \cdot \frac{m_1 \times m_2}{d^2}$$

También es muy importante sabe leer las fórmulas escritas en lenguaje algebraico en el lenguaje común y corriente.

Por ejemplo la fórmula:

$$v = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

Puede leerse como la velocidad (v) es igual a la raíz cuadrada del producto de $2g$ por la diferencia de alturas (h_2) y (h_1).

3.2) SIGNOS DE OPERACIÓN

En el álgebra se realizan las mismas operaciones que en la aritmética, que son: Suma, Resta, Multiplicación, División, Exponenciación, Extracción de raíces y Logaritmos.

Por ser más general el álgebra que la aritmética, se utilizan otras reglas para indicar las operaciones, además de las tradicionales para la aritmética. Lo que nos obliga a **aprendernos todas las tablas de sumar y multiplicar y las operaciones aritméticas**. Por lo que si tienes alguna duda, antes de seguir adelante, te recomiendo repasarlos en el capítulo II dedicado a la aritmética.

Suma: Su signo es $+$ que se lee **más**. Así $a + b$ se lee “**a más b**”.

Resta: Su signo es $-$ que se lee **menos**. Así $a - b$ se lee “**a menos b**”.

Multiplicación: Su signo es $\times$, que se lee **multiplicado por**. Así $a \times b$ se lee “**a multiplicado por b**” o también “**a veces b**”. En lugar del signo $\times$, se utilizan los **paréntesis** para indicar multiplicación, o sea, $a \times b$ es igual a escribir **(a)(b)**. También, se puede suprimir el signo de multiplicación, y si dos letras están seguidas, significa que se están multiplicando, esto es: **ab**.

También, se utiliza un punto intermedio entre los factores para indicar multiplicación, o sea:

$$a \cdot b \text{ es igual a } a \times b$$

En álgebra se omite muchas veces el signo de multiplicación, cuando los factores son letras o cuando los factores son letras y números. Esto es:

$$axy \text{ equivale a } a \times x \times y$$

$$5xzw \text{ equivale a } 5 \times x \times z \times w$$

$$-3y^2t^3u \text{ equivale a } -3 \times y^2 \times t^3 \times u$$

División: Su signo es $\div$, que se lee **dividido entre**. Así $a \div b$ se lee “**a dividido entre b**”. En lugar del signo $\div$, se utiliza una raya horizontal para indicar división, o sea:

$$a \div b \text{ equivale a } \frac{a}{b}$$

También se utilizan los símbolos siguientes para representar la división :

$$a \div b \text{ equivale a } a/b$$

$$a \div b \text{ equivale a } b \overline{)a}$$

Exponenciación: Es una multiplicación abreviada, en la cual se repite varias veces el mismo factor. El factor que se repite se le denomina **base**, y **exponente** al número pequeño que se coloca arriba y a la derecha de la base, y nos **indica las veces que la base debe multiplicarse por sí misma**.

Coeficiente es el número o letra que acompaña y multiplica a la base. Si no se especifica, significa que el coeficiente es uno. Por ejemplo, a^3 tiene de coeficiente 1, es decir, $1a^3$. *Cuando el coeficiente es uno, no se escribe.*

Exponente es el que indica cuantas veces debemos multiplicar la base por sí misma. Si no se especifica, significa que el exponente es uno. Por ejemplo, **a** tiene de exponente 1, es decir, a^1 . *Cuando el exponente es uno, no se escribe.*

Por ejemplo;

$a^4 = a \times a \times a \times a$ debemos multiplicar la base a, 4 veces por sí misma.

$y^6 = y \times y \times y \times y \times y \times y$ debemos multiplicar la base y, 6 veces por sí misma.

Utilizando la convención establecida para la multiplicación, se simplifica de la forma siguiente :

$$a^4 = aaaa$$

$$y^6 = yyyyyy$$

Para los números no puede usarse la regla anterior, ya que 2^3 se escribiría como 222, lo cual es incorrecto.

Lo correcto es :

$$2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8 \text{ multiplicamos 3 veces la base 2 por si misma.}$$

Esto debe quedar bien grabado, ya que es increíble, que algunos alumnos al ponerles la expresión 2^3 dan como resultado 6 en lugar de 8, la hacen como si fuera una multiplicación y no una exponenciación. Esto es muy grave, ya que significa que no quieren aprender, ya que se han concentrado y mucho menos ha grabado en su memoria el concepto, que dice que el **exponente indica el número de veces que debemos multiplicar la base por sí misma**. Hay maestros que cuando un alumno comete este error, lo reprueban, argumentado que sino sabe algo tan simple, no puede saber los demás fundamentos y ya no le califican el resto de un examen o trabajo.

Es importante notar, que cuando una letra o un número no tienen exponente, su exponente es uno. Esto es, x equivale a x^1 y $5xyz$ equivale a $5^1x^1y^1z^1$. **Cuando es uno, el exponente no se escribe.**

Radicación: Es la operación cuyo objeto es **extraer raíces de cantidades**. Su signo es el **radical** $\sqrt{}$ y dentro de este signo se coloca el radicando, que es la cantidad a la cual se le extrae raíz.

Por ejemplo:

$\sqrt{x}$ significa raíz cuadrada de x , o sea la cantidad que elevada al cuadrado da x .
 $\sqrt{36} = 6$ significa que la raíz cuadrada de 36 es 6, puesto que $6^2 = 6 \times 6$ da 36.
 $\sqrt[3]{y}$ significa raíz cúbica de y , o sea la cantidad que elevada al cubo da y .
 $\sqrt[3]{64} = 4$ porque $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$
 $\sqrt[4]{z}$ significa raíz cuarta de z , o sea la cantidad que elevada a la cuarta da z .
 $\sqrt[4]{81} = 3$ porque $3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Nota como cuando es raíz cuadrada no se le pone el número 2 en el radical, es decir, **si se omite el número en el radical, se entenderá que es raíz cuadrada**.

Podemos concluir que existen operaciones directas, donde cada una de ellas tiene su operación inversa. Esto se muestra en la tabla siguiente:

Operación Directa	Operación Inversa
Suma	Resta
Multipliación	División
Exponenciación	Radicación (Extracción de Raíces)

En general, las *operaciones directas* son positivas puesto que incrementan y las *operaciones inversas* son negativas dado que disminuyen.

3.3) SIGNOS DE AGRUPACION

Son los signos que nos indican que una operación está agrupada, es decir, se tiene que tomar como si fuera una sola operación y debe realizarse primero. Los signos de agrupación más utilizados son los paréntesis (), aunque también se utilizan las llaves { }, los corchetes [], la barra o vinculo $\frac{\quad}{\quad}$ y el símbolo radical $\sqrt{\quad}$ en ocasiones se utiliza como signo de agrupación.

Los signos de agrupación, como su nombre lo indica, permiten agrupar varias operaciones y cantidades, permitiendo escribir en forma entendible y clara expresiones aritméticas y algebraicas largas y complejas. Debido a que se utilizan frecuentemente en matemáticas, es muy importante su aprendizaje.

Más adelante, en su momento le dedicaremos más tiempo al estudio de las operaciones agrupadas o intercaladas.

Ejemplos de operaciones agrupadas

- 1) $5 \cdot (4 + 3)$ Primero realizamos lo que está dentro del signo de agrupación, en este la suma que está entre parentésis.
 $5 \cdot (7) = 35$
- 2) $9 \cdot \{5 - 8 + 12 - 7\}$ Primero realizamos la operación que está entre llaves
 $9 \cdot \{5 + 12 - 8 - 7\} = 9 \cdot \{17 - 15\} = 9 \cdot \{2\} = 18$
- 3) $\frac{3 \times (5 + 16)}{(6 + 3)}$ Primero realizamos las operaciones que están entre paréntesis
 $\frac{3 \times (21)}{(9)} = \frac{63}{9} = 7$

$$4) \sqrt{3^2 + 4^2 - 2(3)(4)(0.5) + 12}$$

Primero reducimos lo que está dentro del radical a una sola cantidad, para poder extraer raíz :

$$\sqrt{9 + 16 - 12 + 12} = \sqrt{25} = 5$$

$$5) \frac{3 + 4 \times 5 + 7}{8 \times 5 \div 4 + 5}$$

Primero reducimos a una sola cantidad, tanto el numerador como el denominador :

$$\frac{3 + 20 + 7}{10 + 5} = \frac{30}{15} = 2$$

3.4) SIGNOS DE RELACIÓN

Al comparar o relacionar dos cantidades a y b, sólo existen tres posibilidades: Que a sea mayor que b, o sea, **a > b**, que a sea menor que b, esto es, **a < b** o que sean iguales, es decir, **a = b**. A esto se le conoce como **tricotomía**.

Por ejemplo, $5 < 8$, $8 > 5$, $6 = 6$, $0 > -1$ y $-2 > -6$.

Debemos tener en cuenta, que de acuerdo a su posición en la recta numérica, un número es mayor a otro cuando está a su derecha. Por esta razón, el 0 es mayor que todos los números negativos, por que está a la derecha de todos ellos. También, -1 es mayor que -7, porque está a la derecha de él.

UNIDAD II

3.5) CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

Se estudian en álgebra cantidades que son de **sentidos opuestos**, expresándose las **positivas** al anteponérsele el signo + o ningún signo y a las **negativas** el signo -. En realidad, **todo en matemáticas se reduce a realizar operaciones con cantidades positivas, negativas o nulas**.

Las cantidades positivas representan todo aquello que nos beneficia. Por ejemplo, *gané 1 000 pesos, me pagaron 5000 pesos, cobré 350 pesos, me dieron 30 manzanas, recibí un cheque por 300 dólares*, etc. Matemáticamente podemos expresarlas como +1 000 pesos, +5 000 pesos, +350 pesos, +30 manzanas, +300 dólares. **Todo lo que signifique un incremento o ganancia para nosotros, lo representaremos con signo positivo.**

Nota: El signo + no se pone si la cantidad está al principio. Por ejemplo, +3, +5, se escriben simplemente como 3, 5. De la misma manera, la operación +7 + 6, se escribe como 7 + 6. Solo si las cantidades están al principio, se les puede omitir el signo +.

Las cantidades negativas representan todo aquello que nos perjudica. Por ejemplo, *perdí* 2 000 pesos, *pagué* 3 000 pesos, *presté* 650 pesos, *di* 20 cuadernos, *pagué* una cuenta de 1 500 dólares, etc. Matemáticamente podemos expresarlas como -2 000 pesos, -3 000 pesos, -650 pesos, -20 cuadernos, -1 500 dólares. **Todo lo que signifique un decremento ó pérdida para nosotros, lo representaremos con signo negativo.**

Existen otras cantidades que también pueden clasificarse como positivas o negativas. Si escogemos una como positiva, su inversa necesariamente será negativa. Por ejemplo, para medir la temperatura, escogemos los grados sobre cero como positivos, quedando los grados bajo cero como negativos. Por ejemplo, +35° C representa una temperatura cálida, mientras que -10° C representa una temperatura muy fría. También, el tiempo transcurrido después de Cristo se considera positivo y el tiempo transcurrido antes de Cristo, como negativo. Así +1998 representa el año 1998 después de Cristo y -100 representa 100 años antes de Cristo.

De la misma forma, si decimos que el eje x positivo queda a la derecha del cero, el negativo quedará a la izquierda. También, el *eje y* se considera positivo hacia arriba del cero y negativo hacia abajo del cero. Una pelota que se lance al aire, se considerará su trayectoria positiva mientras esté subiendo y negativa cuando empiece a bajar.

3.5.1) SUMA Y RESTA DE CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

Las matemáticas al igual que otras ciencias se basan en conceptos, reglas y principios. Por esto, es muy importante entenderlos totalmente, ya que si grabamos en nuestra memoria los principios básicos y si somos obedientes y respetuosos de las reglas y leyes matemáticas, tendremos éxito en dominar las matemáticas.

Los principios son fáciles y muy simples, por ejemplo “*la multiplicación de cantidades del mismo signo da un resultado positivo*”, o esto mismo expresado en forma más simple sería: “*signos iguales dan positivo*”.

Al tener bien fijos estos conceptos en nuestra mente, lograremos utilizarlos correctamente y casi de manera automática. Después podremos combinarlos en problemas más completos y los resolveremos con facilidad. **La clave está en grabar fijamente los principios sencillos y luego aprender a combinarlos.**

“Sigue acumulando cosas pequeñas, y pronto tendrás un gran tesoro” Proverbio Latino

He visto como algunos muchachos en clase aplican bien los principios, pero al otro día ya ni se acuerdan. Esto significa que no han grabado en su mente los principios, **ya que para lograr esto se necesita atención, concentración y ganas de hacerlo**, ya que sin estas 3 características, jamás lograrán grabarlos en su poderoso cerebro. A pesar de su poder, el cerebro aprende sólo pequeñas reglas y frases. Afortunadamente, todo principio, regla o ley en matemáticas es corta y simple. Pero debemos querer y desear aprenderlas, ya que esto es el *pegamento* que hace que queden firmemente grabadas en nuestra mente. Aprende poquito pero apréndelo muy bien. Fíjate en los detalles, sé observador y habrás dado un gran paso en dominar las matemáticas. Recuerda lo que Einstein decía.

La matemática tiene sus bases en la lógica, esta basada en principios sencillos, congruentes e inmutables. Dichos principios o postulados jamás se contradicen y siempre se aplica de la misma manera. Aunque que no trabajes con el concepto del principio, sino con su expresión matemática, siempre todo se derivó de la definición.

En matemáticas, siempre se trabaja sólo con tres tipos de cantidades, las positivas, las negativas y las nulas (cero). A veces, para representar las cantidades utilizamos únicamente números, o letras, pero también la combinación de letras y números. **¿Cómo identificamos donde termina y donde empieza una cantidad? Esto se logra mediante los signos - y +**, ya que son los que me separan una cantidad de otra y a cada cantidad se le denomina **término**. Esto significa que los términos pueden ser positivos, negativos o nulos.

Es fundamental dominar las operaciones con cantidades positivas y negativas, ya que siempre se está trabajando con ellas. El objetivo principal del álgebra es trabajar con cantidades positivas y negativas, así que si las dominamos, habremos dado un gran paso para dominar las matemáticas en su conjunto.

Los conceptos anteriores nos ayudan a realizar operaciones como las siguientes:

+3 + 4 = +7	Gané 3 y después gané 4 en total gané 7
+3 - 4 = -1	Gané 3 y después perdí 4 en total perdí 1
-3 + 4 = +1	Perdí 3 y después gané 4 en total gané 1
-3 - 4 = -7	Perdí 3 y después perdí 4 en total perdí 7

Nota como las palabras te ayudarán a recordar esta regla más fácilmente. He visto como mis alumnos, dudan cuando les toca hacer la operación $-5 - 7$.

Les digo que no olviden expresarlo con palabras de cantidades, es decir, por ejemplo, *como son negativos, diría si debo 5 y luego debo 7 en total debo 12; esto es $-5 - 7 = -12$* . Debo es sinónimo del signo menos y el signo $-$ siempre nos representa cantidades negativas.

LA REGLA PARA SUMAR CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS SE RESUME EN 2 CASOS:

Al sumar cantidades del mismo signo, se suman y al resultado se le pone el mismo signo que tienen los sumandos.

Por ejemplo:

$+8 + 5 = +13$	<i>Más 8 y más 5 igual a más 13</i>
$+2 + 3 + 4 = +9$	Más 2 más 3 y más 4 igual a más 9
$-8 - 5 = -13$	Menos 8 y menos 5 igual a menos 13
$-2 - 3 - 4 = -9$	Menos 2 menos 3 y menos 4 igual a menos 9

Al sumar cantidades de signos distintos, al número de mayor valor absoluto se le resta el de menor valor absoluto y al resultado se le pone el signo del mayor en valor absoluto.

Por ejemplo:

$+14 - 6 = +8$	<i>El mayor en valor absoluto es 14 (+) menos el menor 6, es igual a 8 con el signo del de mayor valor absoluto (+)</i>
$-14 + 6 = -8$	El mayor en valor absoluto es 14 (-) menos el menor 6, es igual a 8 con el signo del de mayor valor absoluto (-)
$+8 - 12 = -4$	El mayor en valor absoluto es 12 (-) menos el menor 8, es igual a 4 con el signo del de mayor valor absoluto (-)
$-8 + 12 = +4$	El mayor en valor absoluto es 12 (+) menos el menor 8, es igual a 4 con el signo del de mayor valor absoluto (+)

Nota: Cuando los sumandos son del mismo signo siempre se suman y el resultado queda con su mismo signo. Sólo hay resta cuando los sumandos son de signo contrario, al mayor valor se le resta el menor y el resultado queda con el signo del número mayor.

Al hacer este tipo de operación aplicamos el concepto de valor absoluto, el cual definimos como:

VALOR ABSOLUTO DE UN NÚMERO: Es el valor prescindiendo del signo del número. Es decir, al hallar *el valor absoluto de un número siempre lo consideraremos positivo*. Recordando que cuando un número o cantidad no lleva signo siempre se considera positivo.

El valor absoluto lo representamos encerrando el número entre dos barras verticales de la forma $|a|$ y también es un **signo de agrupación**.

Ejemplos :

$$|+12| = 12$$

$$|-12| = 12$$

En los ejemplos siguientes, primero se realiza la operación al interior del valor absoluto.

$$|+6 + 7| = |+13| = 13$$

$$|-5 - 4| = |-9| = 9$$

$$|-9 + 4| = |-5| = 5$$

$$|7 - 4| = |+3| = 3$$

$$|-x| = x$$

$$|-ab| = ab$$

$$|(7 - 9)| = |-2| = 2$$

EJERCICIO 1

Hacer las sumas siguientes:

$$+17 + 19 =$$

$$-13 - 18 =$$

$$-17 - 19 =$$

$$-14 + 16 =$$

$$10 - 31 =$$

$$-18 + 14 =$$

$$15 + 71 =$$

$$-13 + 93 =$$

Hallar el valor absoluto de:

$$|-12| =$$

$$|+118| =$$

$$|-xy| =$$

$$c) |-71 - 91| = | \quad | =$$

$$d) |-18 + 61| = | \quad | =$$

- e) $|-17 + 14| = | \quad | =$
 f) $|19 + 41| = | \quad | =$
 g) $|-27 + 24| = | \quad | =$

Si pudiste resolver correctamente estos ejercicios, entonces tienes aptitudes excepcionales para aprender a dominar las matemáticas. Si no fue así, entonces repasa nuevamente el tema. Recuerda que no debes avanzar a la siguiente unidad sin resolver correctamente sus ejercicios correspondientes.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA

Tenia \$20 pesos, pagué \$9 pesos, cobré \$35 pesos y luego gasté \$57 pesos. ¿Cuál es mi estado económico?

$$+20 - 9 + 35 - 57 =$$

Separando positivos de negativos:

$$+20 + 35 - 9 - 57 =$$

Sumando los positivos y negativos:

$$+ 55 - 66 = -11 \quad \text{Debo } \$ 11 \text{ pesos.}$$

Tengo \$300 pesos. Cobré \$75 pesos y pagué \$197 pesos. ¿Cuánto tengo?

$$+300 + 75 - 197 =$$

$$+375 - 197 = + 178$$

Tengo \$ 178 pesos.

Pagué 3 deudas por \$ 180, \$200 y \$65 pesos. Después cobré mi salario por \$460 pesos y compré un libro por \$48 pesos. ¿Cuánto me quedó?

$$-180 - 200 - 65 + 460 - 48 =$$

$$+460 - 180 - 200 - 65 - 48 =$$

$$+460 - 393 = + 67 \quad \text{Me quedaron } \$ 67 \text{ pesos.}$$

A las 5 A.M. el termómetro marca -6° C. A las 10 A.M. la temperatura ha subido 12° C y a las 7 P.M. ha bajado 9° C. Expresar la temperatura a las 7 P. M.

$$- 6 + 12 - 9 =$$

$$12 - 15 = - 3.$$

Es decir, a las 7 de la noche hay una temperatura de 3° C bajo cero.

5) Un automóvil recorre una distancia de 20 Km a la derecha del punto A, después recorre 35 Km a la izquierda del punto A y finalmente recorre 12 Km hacia la derecha del punto A. ¿A qué distancia quedó el automóvil del punto A?

Considerando positivos los movimientos a la derecha, por lo tanto serán negativos los que se hayan hecho a la izquierda.

$$+20 - 35 + 12 =$$

$$+32 - 35 = -3$$

Quedó 3 Km. a la izquierda del punto A.

Hasta ahorita, hemos visto solo operaciones de dos sumandos. Pero ahora veremos como generalizar a cualquier número de sumandos, ya sean positivos o negativos. *La generalización, es una cualidad importante que debemos tener para aprender a dominar las matemáticas, ya que las reglas básicas aún se seguirán aplicando aunque las operaciones sean más complejas.*

Jamás debemos preocuparnos de que ahora las operaciones tengan más cantidades, ya que las reglas se siguen manteniendo, lo único que nos implicará será un poquito de más tiempo.

UNIDAD III

3.6) REGLA PARA SUMAR VARIOS SUMANDOS DE CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS:

Primeramente se separan los sumandos positivos de los sumandos negativos, después se suman por un lado las positivas y por otro las negativas, al final se obtiene el resultado aplicando las reglas como cuando se tienen 2 sumandos.

Ejemplos : Sumar

$$-5 - 6 + 4 + 6 + 9 - 7 - 10 + 8 - 1 + 12 - 5 + 3 =$$

Separando, colocando primeramente las cantidades positivas y luego las negativas:

$$+4 + 6 + 9 + 8 + 12 + 3 - 5 - 6 - 7 - 10 - 1 - 5 =$$

Ahora sumando todas las positivas por un lado y las negativas por otro, se obtiene:

$$+42 - 34 = +8$$

$$15 + 16 - 4 - 6 + 19 - 17 - 10 + 8 - 11 =$$

Separando:

$$+16 + 19 + 8 - 15 - 4 - 6 - 17 - 10 - 11 =$$

sumando cada cantidad:

$$+ 43 - 63 = -20$$

El signo positivo + y el signo negativo -, nos sirven también para separar una cantidad de otra. Por ejemplo, en la expresión siguiente tenemos 7 cantidades, es decir, 7 sumandos:

$$- 5 + 6 - 3 - 2 + 3 - 4 + 3 =$$

En ocasiones, las cantidades aparecen como combinación de letras y números, haciendo que al alumno las matemáticas ya le empiecen a parecer difíciles, aunque en realidad, las reglas y principios siguen siendo los mismos y se aplican de la misma manera.

La sencillez y belleza de las matemáticas radica en que sus principios son simples y jamás cambian. Por esto, *apréndanse bien las reglas y leyes básicas y jamás duden al aplicarlas*. Aprende poquito pero apréndelo bien, grábalo firmemente en tu memoria. Saber aplicar y combinar las reglas y leyes en su forma más simple, proporciona el éxito en las matemáticas. Evite al máximo la “hipocresía en las matemáticas”.

Este libro se enfoca a los fundamentos de las matemáticas, ya que al dominarlos, te permitirá tener éxito en cualquier tema de las matemáticas posteriores al álgebra.

He observado como los alumnos al cambiarles un poco las cantidades, ya no saben que hacer, a pesar de que todos los ejercicios anteriores los hizo con facilidad. En ocasiones, empiezan resolviendo bien todos los ejercicios, pero al hallar un tema o problema que consideran difícil, se dan por vencidos y ya no quieren saber nada de matemáticas. Por eso, en este libro hemos tratado de evitar al máximo esta situación, procurando que todos los temas lleven una secuencia fácil y accesible. Pero recuerda que siempre debes estar dispuesto al aprendizaje, ya que de no ser así, a pesar de su sencillez, éste libro no logrará su objetivo.

No te desanimes y si notas que algún tema se te dificulta, repásalo varias veces hasta dominarlo y sigue adelante. En caso extremo pide ayuda de un compañero o de algún maestro de matemáticas que sea amable y paciente.

Recuerde siempre: las reglas en las matemáticas jamás cambian, cambiaran las cantidades, pero las reglas y leyes jamás. Así como la regla se enseña en este libro, así apréndala y así aplíquela, jamás dude cuando se le presente la oportunidad de usarla. Las calculadoras y computadoras, tienen bien

grabadas estos principios y reglas y siempre la aplican de la misma forma, por eso jamás se equivocan. Nuestro cerebro es muy superior a una computadora, tenemos millones de neuronas y cada una de ellas equivale a una computadora avanzada.

Resumiendo, al aparecer cantidades que incluyen letras debemos sumarlas o restarlas bajo las mismas reglas ya explicadas anteriormente, tomando en cuenta que *solo se pueden sumar **cantidades semejantes, que son las cantidades que tienen la misma parte literal, pero diferente coeficiente numérico***. Por ejemplo, $3x$, $-5x$, $8x$, $-10x$, $\frac{1}{2}x$, $-\frac{1}{4}x$ son cantidades semejantes, ya que tienen la misma parte literal **x** y solo cambian sus coeficientes.

También :

$$-5x^2, 6x^2, -\frac{2}{3}x^2, \frac{3}{4}x^2$$

Son cantidades semejantes, ya que tienen la misma parte literal x^2 y solo cambian sus coeficientes. Recuerde que solo se pueden sumar cantidades semejantes y nunca las de distinta parte literal, esto es, que no se pueden sumar naranjas con manzanas, a pesar de que las dos sean frutas.

Ejemplos :

Sumar

$$5x - 6y + 4x + 6x + 9y - 7y - 10x + 8y - 1 + 12x - 5y + 3 =$$

Separando, colocando primeramente las cantidades positivas y luego las negativas de **x** , de la misma forma para **y** , y después las cantidades numéricas solas:

$$+ 4x + 6x + 12x - 5x - 10x + 9y + 8y - 6y - 7y - 5y + 3 - 1 =$$

Ahora sumando todas las positivas por un lado y las negativas por otro, se obtiene:

$$22x - 15x + 17y - 18y + 3 - 1 =$$

Finalmente se obtiene:

$$7x - y + 2$$

$$15y + 16x - 4x - 6y + 19y - 17x - 10y + 8 - 11 =$$

Separando:

$$+ 16x - 4x - 17x + 15y + 19y - 6y - 10y + 8 - 11 =$$

Sumando las cantidad semejantes:

$$+ 16x - 21x + 34y - 16y + 8 - 11 =$$

Finalmente queda:

$$-5x + 18y - 3$$

$$5z + 6x - 4x - 16y + 9y - 7x - 3y + 18 - 21 + 13y + 5x - 10 =$$

Separando:

$$+ 6x + 5x - 4x - 7x + 9y + 13y - 16y - 3y + 5z + 18 - 21 - 10 =$$

Sumando cada tipo de cantidad:

$$+ 11x - 11x + 22y - 19y + 5z + 18 - 31 =$$

Finalmente resulta:

$$3y + 5z - 13$$

Nota: como z no tuvo otra cantidad semejante, por lo tanto no se pudo sumar, únicamente se fue bajando para dejarlo como un sumando en el resultado. Siempre debe procederse así, cuando no se tengan cantidades semejantes. Es decir, debemos dejar la operación *indicada*.

EJERCICIO 2

Realizar las sumas siguientes:

$$- 7x + 5y - 11x + 8y - 6 + 14x - 9y + 7 =$$

$$- 12 + 15y + 12x - 7y + 21x - 6w + 7z + 9y - 13x =$$

$$2a + 3b - 5a + 5b - 7b - 9b - 11a + 15 =$$

$$- a + b - c + d + 2a - 2b + 3c + 4d + 10 - 7 - 3 =$$

$$17 - 7 + 3z - 5w + 9w - 7w - 8z + 6z + 11 =$$

$$4x - 7y + 2x - 9y - 10x + 15y + 7 =$$

$$\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x + y - \frac{1}{2}y =$$

UNIDAD IV

3.7) MULTIPLICACION Y DIVISION DE CANTIDADES POSITIVAS Y NEGATIVAS

Al igual que la suma y resta, debemos también dominar la multiplicación y división de cantidades positivas y negativas, ya que siempre están presentes en las matemáticas.

La regla para multiplicar o dividir dos cantidades positivas y negativas se resume en 2 casos:

Al multiplicar o dividir dos cantidades del mismo signo, se multiplican o dividen y al resultado se le pone signo positivo. Es decir, al multiplicar o dividir cantidades de signos iguales da positivo.

Al multiplicar o dividir dos cantidades de diferentes signos, se multiplican o dividen y al resultado se le pone signo negativo. Es decir, al multiplicar o dividir cantidades de signos distintos da negativo.

A esto se le conoce como la Ley de los Signos y se resume en la siguiente tabla:

MULTIPLICACIÓN

$(+3) (+4) = +12$	Más 3 por más 4 da más 12
$(-3) (-4) = +12$	Menos 3 por menos 4 da más 12
$(-3) (+4) = -12$	Menos 3 por más 4 da menos 12
$(+3) (-4) = -12$	Más 3 por menos 4 da menos 12

DIVISIÓN

$+12 / +4 = +3$	Más 12 entre más 4 da más 3
$-12 / -4 = +3$	Menos 12 entre menos 4 da más 3
$-12 / +4 = -3$	Menos 12 entre más 4 da menos 3
$+12 / -4 = -3$	Más 12 entre menos 4 da menos 3

La demostración de la ley de los signos cae en el campo de la Lógica y de la Filosofía, que además de Historia y por supuesto Matemáticas y Taller de Lectura y Redacción, constituyen toda formación básica en el bachillerato y por esto forman lo que se conoce como Tronco Común.

Sin embargo, en términos simples podemos deducirla de la forma siguiente: Al utilizar tiempos, solo pueden ser de tres tipos: pasado, presente y futuro.

Si denotamos el presente como el origen, es decir, nos representará el 0, entonces el pasado se representará por los números negativos y el futuro por los números positivos. También, suponiendo que mis ganancias y pérdidas por día pueden ser de \$ 50. Recordando que las ganancias serán positivas y las pérdidas negativas. Entonces, si gana durante 3 días tendrá $(+3) (+50) = +150$ pesos, es decir, incrementa sus ganancias en esa cantidad. Si pierde durante 3 días tendrá $(+3) (-50) = -150$ pesos, es decir, disminuye sus ganancias en esa cantidad. Si hace 3 días ganó, entonces $(-3) (+50) = -150$ pesos, es decir, hace 3 días tenía 150 pesos menos que ahora y Si hace 3 días perdió, entonces $(-3) (-50) = +150$ pesos, es decir, hace 3 días tenía 150 pesos más que ahora.

Claramente se ve que signos iguales da positivo y que signos distintos da negativo. La ley de los signos sólo es para la multiplicación y división; y no se aplica en la suma y la resta. Esta regla debes grabarla firmemente en tu memoria, ya que jamás cambia y siempre la estarás utilizando.

Ejemplos:

Multiplicar

$(-10)(-3) = +30$ puesto que $(-)$ por $(-)$ da $+$.
 $(+10)(+5) = +50$ puesto que $(+)$ por $(+)$ da $+$.
 $(+12)(-4) = -48$ puesto que $(+)$ por $(-)$ da $-$.
 $(-11)(+7) = -77$ puesto que $(-)$ por $(+)$ da $-$.

Dividir

$(-10)/(-5) = +2$ puesto que $(-)$ entre $(-)$ da $+$.
 $(+12)/(+4) = +3$ puesto que $(+)$ entre $(+)$ da $+$.
 $(+18)/(-3) = -6$ puesto que $(+)$ entre $(-)$ da $-$.
 $(-21)/(+7) = -3$ puesto que $(-)$ entre $(+)$ da $-$.

Nota importante: siempre que haya dos signos seguidos multiplicándose, estos deben multiplicarse aplicando la ley de los signos.

Por ejemplo:

$+5 + (-6)$ multiplicando los signos seguidos queda como $+5 - 6 = -1$
 $-3 - (-4)$ multiplicando los signos seguidos queda como $-3 + 4 = +1$
 $+4 - (+8)$ multiplicando los signos seguidos queda como $+4 - 8 = -4$
 $+7 - (-11)$ multiplicando los signos seguidos queda como $+7 + 11 = +18$

En la actualidad, las calculadoras Casio® permite que escribas dos signos seguidos, tal como: $--5$, $+7$, $+-8$, $++2$ y le aplica la ley de los signos. En su modelo S-VPAM Natural Display, las operaciones aparecen tal como se escribe en matemáticas y es la calculadora científica que te recomiendo adquirir.

MULTIPLICACIÓN DE VARIAS CANTIDADES: se multiplican primero los dos factores de la izquierda y se les aplica la ley de los signos, este resultado se multiplica por el factor siguiente, repitiéndose este proceso hasta terminar con el último factor.

Ejemplos:

Multiplicar

$$(-2)(-5)(+7)$$

Multiplicando los dos primeros factores, resulta:

$$(+10)(+7)$$

Multiplicando nuevamente, resulta:

$$+70$$

$$(+5)(-8)(-9)(-3)(-6)$$

Multiplicando los dos primeros factores, resulta:

$$(-40)(-9)(-3)(-6)$$

Ahora multiplicando los dos factores siguientes, resulta:

$$(+360)(-3)(-6)$$

Repitiendo:

$$(-1080)(-6)$$

Finalmente resulta:

$$+6480$$

$$(+9)(-7)(+8)(-2)(-3)(+6)$$

Multiplicando los dos primeros factores, resulta:

$$(-63)(+8)(-2)(-3)(+6)$$

Repitiendo:

$$(-504)(-2)(-3)(+6)$$

Multiplicando nuevamente:

$$(+1008)(-3)(+6)$$

Repitiendo:

$$(-3024)(+6)$$

Finalmente resulta:

-18144

EJERCICIO 3

Multiplicar

$$(-2)(-5)(+7)$$

$$(+5)(-8)(-9)(-3)(-6)$$

$$(+9)(-7)(+8)(-2)(-3)(+6)$$

$$(-9)(-5)(-3)$$

$$(5)(+12)(-6)(-3)(-6)$$

$$(9)(-7)(+8)(-7)(-1)(+6)$$

$$(2)(5)(7)(11)$$

$$(-5)(-8)(-2)(-3)(-4)$$

$$(4)(-5)(-3)(-2)(-3)(+6)$$

$$(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{4})$$

DIVISIÓN DE VARIAS CANTIDADES: Primero se realizan las multiplicaciones que aparecen en el numerador y denominador, reduciéndose las cantidades del numerador y del denominador a una sola cantidad, después se realiza la división. Aplicando siempre en todo esto la ley de los signos.

Ejemplos: Dividir

$$1. - \frac{(-12)(+9)}{(-3)(+6)} \text{ multiplicando en el numerador}$$

y en el denominador, queda :

$$\frac{-108}{-18} = +6$$

$$2. - \frac{(-14)(+10)(-5)}{(-2)(+5)(+7)} \text{ multiplicando en el numerador}$$

y en el denominador, queda :

$$\frac{+700}{-70} = -10$$

$$3. - \frac{(+3)(+11)(-6)}{(+5)(+8)(-2)} \text{ multiplicando en el numerador}$$

y en el denominador, queda :

$$\frac{-198}{-80} \text{ sacando mitad (significa dividir entre 2 el numerador y denominador),}$$

$$\text{queda } + \frac{99}{40} = +2.475$$

EJERCICIO 4: Dividir

$$\begin{array}{l}
 1. - \frac{(-16)(+5)}{(-4)(+10)} \\
 2. - \frac{(-1)(+15)(-8)}{(-4)(+5)} \\
 3. - \frac{(+3)(+9)(-6)(+8)}{(+15)(+2)(-2)}
 \end{array}$$

Estas reglas para la multiplicación son muy útiles en la exponenciación, ya que en realidad esta operación es una multiplicación abreviada donde el factor se repite un número de veces especificado por el exponente.

Se presentan 3 casos:

Que la base sea positiva: entonces el resultado será positivo.

$$\begin{aligned}
 \text{Ejemplo : } (9)^3 &= (9)(9)(9) \\
 &= (81)(9) \\
 &= 729
 \end{aligned}$$

Que la base sea negativa y el exponente par: entonces el resultado será positivo.

Ejemplos: Evaluar las exponenciaciones siguientes

$$\begin{aligned}
 (-5)^4 &= (-5)(-5)(-5)(-5) && 4 \text{ veces se multiplica la base } -5 \text{ por sí misma} \\
 &= (25)(-5)(-5) \\
 &= (-125)(-5) \\
 &= +625
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (-3)^6 &= (-3)(-3)(-3)(-3)(-3)(-3) && 6 \text{ veces se multiplica la base } -3 \text{ por sí misma} \\
 &= (9)(-3)(-3)(-3)(-3) \\
 &= (-27)(-3)(-3)(-3) \\
 &= (+81)(-3)(-3) \\
 &= (-243)(-3) \\
 &= +729
 \end{aligned}$$

Esto se debe a que al multiplicar un número par de veces los signos iguales siempre da positivo.

Que la base sea negativa y el exponente impar: entonces el resultado será negativo.

Ejemplos: Evaluar las exponenciaciones siguientes

$$\begin{aligned} (-5)^3 &= (-5)(-5)(-5) \\ &= (25)(-5) \\ &= -125 \end{aligned}$$

3 veces se multiplica la base -5 por sí misma

$$\begin{aligned} (-3)^5 &= (-3)(-3)(-3)(-3)(-3) \\ &= (9)(-3)(-3)(-3) \\ &= (-27)(-3)(-3) \\ &= (+81)(-3) \\ &= -243 \end{aligned}$$

5 veces se multiplica la base -3 por sí misma

Esto se debe a que al multiplicar un número impar de veces los signos iguales siempre da negativo.

Lo anterior es muy importante, ya que también he visto como los maestros de matemáticas, al ver que el alumno no le coloca el signo correcto a las operaciones,

$(-3)^6$ y $(-5)^3$, los reprueban y no les califican el resto del problema o incluso del examen. Ya que argumentan que el dominio de estos conceptos, es fundamental para tener éxito en matemáticas. En esto último estoy de acuerdo, no así en lo relativo a la forma de calificar.

EJERCICIO 5

Evaluar las exponenciaciones siguientes:

$$\begin{aligned} &(-2)^6 \\ &(-6)^4 \\ &(-1)^5 \\ &(-8)^3 \\ &(-1/2)^4 \\ &(-2/3)^2 \\ &(-3/5)^3 \end{aligned}$$

UNIDAD V

3.7) LEYES DE LOS EXPONENTES PARA LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN

Cuando se multiplican cantidades que tienen la misma base **los exponentes se suman** y solo los *coeficientes numéricos* se multiplican.

Esto se expresa como:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \quad (L1)$$

Esto se debe a que por ejemplo $(x^3)(x^4) = (xxx)(xxxx) = (xxxxxxxx) = x^{3+4} = x^7$

Ejemplos: Multiplicar

$$1) a^{2x} \cdot a^{3x} = a^{2x+3x} = a^{5x}$$

$$2) b^{5y} \cdot b^{6y} = b^{5y+6y} = b^{11y}$$

$$3) a^{-8t} \cdot a^{6t} = a^{-8t+6t} = a^{-2t}$$

$$4) a^{9w} \cdot a^{-3w} = a^{9w+(-3w)} = a^{9w-3w} = a^{6w}$$

$$5) a^{-7m} \cdot a^{-3m} = a^{-7m+(-3m)} = a^{-7m-3m} = a^{-10m}$$

$$6) x^a \cdot x^b = x^{a+b} \text{ así se deja indicada}$$

puesto que el exponente a es diferente de b .

$$7) a \cdot a = a^{1+1} = a^2 \text{ Recuerde que cuando no se escribe,}$$

el exponente es uno.

$$8) 3a^3 \cdot -2a^7 = (3)(-2)a^{3+7} = -6a^{10}$$

$$9) -7x^{-5} \cdot -6x^8 = (-7)(-6)x^{-5+8} = +42x^3$$

$$10) a^4 \cdot b^5 = a^4b^5 \text{ así se deja indicada}$$

puesto que las bases son distintas.

Nota como todos los temas vistos hasta ahora están totalmente relacionados, de ahí la importancia de dominar perfectamente los temas en el orden en que se presentan y nunca saltarse ningún tema ni ejercicio. Antes de avanzar a la unidad siguiente, debes haber resuelto total y correctamente el ejercicio de la unidad previa; esto nos garantizará el éxito al final de este método de autoestudio.



No importa como nos den los exponentes, ya sean letras o números, al multiplicar dos cantidades con la misma base, **debemos sumar los exponentes siempre.**

Ejemplos: Multiplicar

- 1) $3^2 \cdot 3^6 = 3^{2+6} = 3^8$ Si la base es numérica los exponentes también se suman. Nota como quedo inalterada la base 3 en el resultado.
- 2) $2^3 \cdot 2^8 = 2^{3+8} = 2^{11}$
- 3) $4^{-2} \cdot 4^{-7} = 4^{-2+(-7)} = 4^{-2-7} = 4^{-9}$ Recuerda que -2 y -7 suman -9.
- 4) $5^8 \cdot 5^{-11} = 5^{8+(-11)} = 5^{8-11} = 5^{-3}$ Recuerda que 8 y -11 suman -3.
- 5) $a^2 \cdot a^3 = a^{2+3} = a^5$
- 6) $b^5 \cdot b^6 = b^{5+6} = b^{11}$
- 7) $a^{-8} \cdot a^6 = a^{-8+6} = a^{-2}$
- 8) $a^9 \cdot a^{-3} = a^{9+(-3)} = a^{9-3} = a^6$
- 9) $a^{-7} \cdot a^{-3} = a^{-7+(-3)} = a^{-7-3} = a^{-10}$
- 10) $-3x \cdot -6x^3 = (-3)(-6)x^{1+3} = +18x^4$. Nota como los números se multiplican, pero a la base sólo sus exponentes se le suman.
- 11) $x^4 \cdot -x = (1)(-1)x^{4+1} = -x^5$ Su coeficiente es 1 y -1 y se multiplican y los exponentes siempre se suman.
- 12) $-7y^{-5} \cdot 3y^{11} = (-7)(3)y^{-5+11} = -21y^6$
- 13) $+4w^{-3} \cdot -2w^{-6} = (+4)(-2)w^{-3+(-6)} = -8w^{-3-6} = -8w^{-9}$
- 14) $2t^6 \cdot 3t^{-2} = (2)(3)t^{6-2} = 6t^4$

EJERCICIO 6: Realizar las multiplicaciones siguientes

1) $a^5 \cdot a^{12} =$

2) $a^{-5} \cdot a^7 =$

3) $a^{11} \cdot a^{-2} =$

4) $a^{-8} \cdot a^{-4} =$

5) $3a^{3x} \cdot a^{4x} =$

6) $b^{-y} \cdot 5b^{7y} =$

7) $6a^{-3t} \cdot 2a^{-9t} =$

8) $4a^{9w} \cdot 7a^{-3z} =$

9) $4a^{-4m} \cdot 4a^{-2m} =$

10) $x^m + x^{2m} =$

11) $3a \cdot -5a =$

12) $-3a^9 \cdot -2a^{-4} =$

13) $-9x^{-15} \cdot -3x^{10} =$

14) $5x^4 \cdot 3y^5 =$

15) $2^x \cdot 2^{3x} =$

En forma general se presentan muy frecuentemente la multiplicación de cantidades que tienen varias letras como base en ambos factores. En este caso, se procede de la misma manera, pero debemos **sumar únicamente los exponentes de una misma base del primer factor con los exponentes de esta base en el segundo factor** y repetir esto para las bases restantes. Las bases que no se repiten únicamente se bajan multiplicando y aparecerán *indicadas* en el resultado final.

Ejemplos: Multiplicar

1) $2ab^2 \cdot 3a^4b^5 = (2)(3)a^{1+4}b^{2+5} = 6a^5b^7$ Note que los exponentes de a se suman y los correspondientes a b también se suman por separado.

2) $-3a^7b^2c^5 \cdot -6a^3b^8c = (-3)(-6)a^{7+3}b^{2+8}c^{5+1} = +18a^{10}b^{10}c^6$

3) $-5a^{-6}b^6c^8 \cdot 4a^7b^{-8}c^5d = (-5)(4)a^{-6+7}b^{6-8}c^{8+5}d = -20ab^{-2}c^{13}d$

4) $2xy^2z \cdot -7x^2yt^3w = (2)(-7)x^{1+2}y^{2+1}t^3wz = -14x^3y^3t^3wz$

EJERCICIO 7: Multiplicar:

1) $2abc \cdot -4a^4b^2c^3 =$

2) $-3x^2y^3w \cdot 5xygc =$

3) $8x^4y^{-2}t \cdot 6x^{-2}y^5t^{-1} =$

4) $-2abxy \cdot -10x^2y^3b^2a =$

5) $\frac{1}{2}x^2yz \cdot 8xyz \cdot -\frac{1}{3}abxy =$

UNIDAD VI

3.9) JERARQUIA DE LAS OPERACIONES

Uno de los temas más importantes en matemáticas es el de jerarquía o secuencia de las operaciones, toda vez, que es fundamental realizar correctamente y en orden las operaciones matemáticas, para obtener resultados correctos. Por lo cual, debemos seguir estrictamente un orden de ejecución o realización, el cual siempre debe respetarse.

Sin embargo, a pesar de la importancia de este tema, muchos libros y maestros jamás lo enseñan, razón por la cual, el estudiante no respeta la jerarquía de las operaciones y no pueda calcular correctamente expresiones tan sencillas como: $9 - 5 \times 3$ y $7 + 3 \times 4$. Ya que dan como resultados 12 y 40 respectivamente, en lugar de los resultados correctos que son -6 y 19.

Las calculadoras científicas y las computadoras proporcionan resultados correctos, ya que están programadas para que respeten la jerarquía de las operaciones matemáticas, a la cual se le conoce como AOS (Algebraic Operating System), que significa Sistema Algebraico de Operación. Las calculadoras sencillas que no tienen funciones matemáticas no respetan dicha jerarquía y por lo tanto dan resultados incorrectos. Por lo que si deseas usar o comprar una calculadora, esta debe ser del tipo científica, para que te sea de gran apoyo.

El uso de la calculadora sólo es recomendable para comprobar tus resultados, pero no debe sustituir las operaciones mentales necesarias para lograr un dominio de las matemáticas. Es decir, sólo la utilizarás como una herramienta más, tal como lo es la regla, el compás, un libro, etc. Si no comprendes como se realizan las operaciones aritméticas, no sabrás si los resultados que te da la calculadora son correctos o no. El hecho de usar calculadora nos exige un nivel aún mayor de matemáticas, incluso la habilidad de tantear o anticipar un resultado aproximadamente.

El orden correcto en el cual deben realizarse las operaciones es:

- 1° **Se ejecuta primero lo que está dentro de paréntesis o de signos de agrupación.** Los signos de agrupación, además de los paréntesis son: las llaves, los corchetes, los vínculos o rayas, etc.
- 2° Se ejecutan las potencias y raíces.
- 3° Se realizan las multiplicaciones y divisiones.
- 4° Se realizan las sumas y restas.

Esto significa que de todas las operaciones primero se realiza lo que esté dentro de signos de agrupación, luego las potencias y raíces, después las multiplicaciones y divisiones y por último las sumas y restas. Por eso en las operaciones $9 - 5 \times 3$ y $7 + 3 \times 4$, no se puede restar ni sumar, ya que antes existen multiplicación y división respectivamente.

Resumiendo:

Orden	Operación	Signos de Operación
1°	Signos de Agrupación	(), { }, [], ____
2°	Potencias y Raíces	a^n y $\sqrt[n]{a}$
3°	Multiplicaciones y Divisiones	$a \times b$ y $a \div b$
4°	Sumas y Restas	$a + b$ y $a - b$

Nota que en el 2°, 3° y 4° orden, se tienen dos operaciones de la misma jerarquía. Cuando sea este el caso, primera se ejecuta la operación que está más a la izquierda, ya que **el orden de ejecución es de izquierda a derecha**.

Es decir, si se tiene: $27 / 3 \times 7$, primero se divide y luego se multiplica, esto da: $9 \times 7 = 63$. También, si se tiene $48 \times 6 / 4$, como tienen la misma jerarquía, primero se multiplica y luego se divide, esto es, $288 / 4 = 72$.

También, cuando se tengan signos de agrupación dentro de otros signos de agrupación, a esto se le llama *anidación*, primero se realizarán las operaciones que estén en el signo de agrupación más interior.

Los signos de agrupación mas utilizados son los paréntesis y le siguen los corchetes y las llaves. No se recomienda el uso de rayas o vínculos como signos de agrupación. Ocasionalmente, el radical $\sqrt{\quad}$ y el valor absoluto también se consideran como signos de agrupación. Por esta razón, deben realizarse todas las operaciones que están dentro del radical antes de obtener la raíz, ya que sólo puede extraerse la raíz a una sola cantidad.

La barra de fracción o división, también es un signo de agrupación, por ello, todas las operaciones que están arriba y debajo de la barra, se deben

efectuar primero antes de dividir, ya que sólo se puede dividir cuando existe una sola cantidad tanto en el numerador como en el denominador. **Al usar calculadora o computadora, cuando el numerador o denominador se componga de dos o más cantidades, éstas deben encerrarse entre paréntesis.**

Dentro de los signos de agrupación, al realizarse las operaciones en su interior, también debe respetarse la jerarquía de las operaciones.

Algunas normas útiles al suprimir signos de agrupación son:

Si un signo + precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir sin modificar los términos que contiene.

Esto es: $+(5x^2y^3 - 12x^5y^2 + 10 - 12)$ queda como $5x^2y^3 - 12x^5y^2 + 10 - 12$

Si un signo - precede al símbolo de agrupamiento, dicho símbolo se puede suprimir cambiándole el signo a cada uno de los términos que contiene.

Esto es: $-(5x^2y^3 - 12x^5y^2 + 10 - 12)$ queda Como $-5x^2y^3 + 12x^5y^2 - 10 + 12$

Por ejemplo, sea la siguiente operación:

$$(a - b + c) + (2a + 3b - c) - (-4a + 5b - 7c)$$

Aplicando las reglas anteriores, queda:

$$a - b + c + 2a + 3b - c + 4a - 5b + 7c$$

$$\text{O sea: } a + 2a + 4a - b + 3b - 5b + c - c + 7c = \mathbf{7a - 3b + 7c}$$

Otro ejemplo: sea la operación siguiente:

$$(2 \times 7 - 2 (3 + 4 \{4 / 2 \times 5 [3 - 12 + 10] + 8\} - 9) \times 3)$$

Si no conociéramos la jerarquía de las operaciones, esto nos parecería difícil. Sin embargo, aplicándola como se estableció anteriormente, no tiene ninguna dificultad, al igual como cualquier otro problema.

El signo de agrupación más interior es el corchete $[3 - 12 + 10]$, al hacer la operación que contiene resulta $3 - 12 + 10 = 1$.

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 2 (3 + 4 \{4 / 2 \times 5 [1] + 8\} - 9) \times 3)$$

Neftalí Antúnez H.

Ahora la operación mas interior es $5 [1] = 5$.

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 2 (3 + 4 \{4 / 2 \times 5 + 8\} - 9) \times 3)$$

Ahora la operación mas interior es $\{4 / 2 \times 5 + 8\}$. Ejecutándola aplicando la jerarquía, queda: $2 \times 5 + 8$, o sea: $10 + 8 = 18$.

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 2 (3 + 4 \{18\} - 9) \times 3)$$

Ahora la operación mas interior es $4 \{18\} = 72$.

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 2 (3 + 72 - 9) \times 3)$$

Realizando la operación en el paréntesis más interior, queda: $(3 + 72 - 9) = 75 - 9 = 66$

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 2 (66) \times 3)$$

Ahora la operación mas interior es $-2 (66) = -132$.

La expresión se reduce a:

$$(2 \times 7 - 132 \times 3)$$

Finalmente, haciendo las operaciones al interior de este ultimo paréntesis y respetando como siempre la jerarquía, se obtiene: $14 - 132 \times 3$, no podemos restar puesto que primero se realiza la multiplicación, esto es. $14 - 396 = -382$.

Si realizas las operaciones respetando siempre la jerarquía, obtendrás el resultado correcto. Al principio debes ir con mucho cuidado y atención, por lo tanto, no serás muy veloz, ya que la velocidad te la dará la práctica. Conociendo aritmética y álgebra y respetando la jerarquía de las operaciones, no habrá fórmula que no puedas despejar o sustituir datos para hallar su valor numérico.

Un ejemplo más: sea la operación siguiente:

ÁLGEBRA

$$(3 \times 4 - 6 (8 - 2 \{9 / 3 \times 9 [8 - 7 + 11] \times 2\} + 12) / 3)$$

El signo de agrupación más interior es el corchete $[8 - 7 + 11]$, al hacer la operación que contiene resulta $19 - 7 = 12$.

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 - 6 (8 - 2 \{9 / 3 \times 9 [12] \times 2\} + 12) / 3)$$

Ahora la operación mas interior es $9 [12] = 108$.

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 - 6 (8 - 2 \{9 / 3 \times 108 \times 2\} + 12) / 3)$$

Ahora la operación mas interior es $\{9 / 3 \times 108 \times 2\}$. Ejecutándola aplicando la jerarquía, queda: $3 \times 108 \times 2$, o sea: $324 \times 2 = 648$.

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 - 6 (8 - 2 \{648\} + 12) / 3)$$

Ahora la operación mas interior es $-2 \{648\} = -1296$.

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 - 6 (8 - 1296 + 12) / 3)$$

Realizando la operación en el paréntesis más interior, queda: $(8 - 1296 + 12) = 20 - 1296 = -1276$

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 - 6 (-1276) / 3)$$

Ahora la operación mas interior es $-6 (-1276) = +7656$.

La expresión se reduce a:

$$(3 \times 4 + 7656 / 3)$$

Finalmente, haciendo las operaciones al interior de este ultimo paréntesis y respetando como siempre la jerarquía, se obtiene: $12 + 2552$, o sea, igual a **2564**.

Ejemplos: Utilizando la jerarquía de las operaciones, hallar el valor de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{3 \times 4 + 8 \div 2 \times 5}{2 \times \sqrt{4} + 6 \times 3} = \frac{12 + 4 \times 5}{2(2) + 6 \times 3} = \frac{12 + 20}{4 + 18} = \frac{32}{22} = 1 \frac{10}{22} = 1 \frac{5}{11} \\
 2) \quad & \frac{(6 + 4(3 \times 5) + 4 \times 3) \div 2 \times 5}{2 - 4 + (16 \div 2 \times 3 + 6) - 4} = \frac{(6 + 4(15) + 12) \div 2 \times 5}{2 - 4 + (8 \times 3 + 6) - 4} \\
 & = \frac{(6 + 60 + 12) \div 2 \times 5}{2 - 4 + (24 + 6) - 4} = \frac{(78) \div 2 \times 5}{2 - 4 + 30 - 4} = \frac{39 \times 5}{32 - 8} = \frac{195}{24} = \frac{65}{8} = 8 \frac{1}{8} \\
 3) \quad & \sqrt{20^2 + 30^2 - 2(20)(30)(\frac{1}{4})} = \sqrt{400 + 900 - 2(20)(30)(\frac{1}{4})} \\
 & = \sqrt{400 + 900 - 1200(\frac{1}{4})} = \sqrt{1300 - 300} = \sqrt{1000} = 31.6228 \\
 4) \quad & \frac{2^4 - 5 \times 3}{75 - 5 \times 3^2} = \frac{16 - 5 \times 3}{75 - 5 \times 9} = \frac{16 - 15}{75 - 45} = \frac{1}{30}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 8: Hallar el valor de las expresiones siguientes:

$$\begin{aligned}
 1) \quad & \frac{8 \times 6 + 18 \div 2 \times 9}{8 \times \sqrt{16} + 2^2} = \\
 2) \quad & \frac{(7 + 3(8 \times 7) + 5 \times 7) \div 2 \times 14}{18 - 6 + (22 \div 2 \times 11 + 10) - 31} = \\
 & = \frac{(-12 + 28 + 46) \div 2 \times -9}{9 - 3(21 + 6) + 18} = \\
 3) \quad & \sqrt{40^2 + 30^2 - 2(25)(35)(0.8) - 200} = \\
 4) \quad & \frac{5 \times 3^4 + 5 \times 3^2}{3 \times 125 - 3^2 \times 5^2} = \\
 5) \quad & \sqrt{\frac{(10 + 2(8 \times 3) + 4 \times 7) \div 2 \times -11}{(121 - 22 + 11) \div 2 \times 8 / (33 - 44)}}
 \end{aligned}$$

UNIDAD VII

3.10) VALOR NUMÉRICO

Es cuando en una expresión algebraica, se sustituyen los valores dados para cada una de sus literales, después se realizan las operaciones de acuerdo a la jerarquía y se obtiene un resultado numérico para alguna de la literal dejada como incógnita.

Resumiendo, para evaluar una expresión algebraica, sustituimos cada literal por un número y después realizamos las operaciones indicadas hasta obtener el resultado.

Ejemplos:

Hallar el valor numérico para $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, si $a = 2$, $b = -3$, $c = 6$, $d = \frac{1}{2}$ y $x = -2$.

Sustituyendo valores y realizando las operaciones:

$$y = 2(-2)^3 + (-3)(-2)^2 + 6(-2) + \frac{1}{2}$$

Primero realizando la potenciación, queda:

$$y = 2(-8) + (-3)(4) + 6(-2) + \frac{1}{2}$$

Ahora realizando la multiplicación, queda:

$$y = -16 - 12 - 12 + \frac{1}{2} = -40 + \frac{1}{2} = \mathbf{-39 \frac{1}{2}}$$

Hallar el valor numérico para $y = ax^5 - bx^4 + cx^2 + dx + e$, si $a = 8$, $b = -4$, $c = 6$, $d = \frac{1}{4}$, $e = 2$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Sustituyendo valores y realizando las operaciones:

$$y = 8(-\frac{1}{2})^5 - (-4)(-\frac{1}{2})^4 + 6(-\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{4})(-\frac{1}{2}) + 2$$

Primero realizando la potenciación, queda:

$$y = 8(-\frac{1}{32}) + (4)(\frac{1}{16}) + 6(\frac{1}{4}) - \frac{1}{8} + 2$$

Ahora realizando la multiplicación, queda:

$$y = -\frac{8}{32} + \frac{4}{16} + \frac{6}{4} - \frac{1}{8} + 2 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{6}{4} - \frac{1}{8} + 2$$

$$y = \frac{3}{2} - \frac{1}{8} + 2 = \frac{12}{8} - \frac{1}{8} + \frac{16}{8} = \frac{28}{8} - \frac{1}{8} = \mathbf{\frac{27}{8}}$$

Hallar el valor numérico para $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$, si $a = -2$, $b = 5$, $c = -4$, $d = 2$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Sustituyendo valores y realizando las operaciones:

$$y = -2(-\frac{1}{2})^3 + (5)(-\frac{1}{2})^2 + (-4)(-\frac{1}{2}) + 2$$

Primero realizando la potenciación, queda:

$$y = -2(-1/8) + (5)(\frac{1}{4}) + 4/2 + 2$$

Ahora realizando la multiplicación, queda:

$$y = 2/8 + 5/4 + 2 + 2 = 1/4 + 5/4 + 4 = 6/4 + 4 = 3/2 + 4 = 1 + \frac{1}{2} + 4 = 5 \frac{1}{2}$$

EJERCICIO 9 Hallar el valor numérico de las expresiones siguientes:

1. $6 + 4(5)$
2. $20 - 6 \div 3 - 4$
3. $2(5) + 5(\frac{3}{4})$
4. $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6} + \frac{1}{2} \times \frac{9}{4}$
5. $-2 + 5[3 - (2 - 4)]$
6. $3[(4 + 6)^2 - \sqrt[3]{8}]$
7. $4\{[(12 - 15) - 3] - 2\} \div 2$
8. $4[3(2 - 6) \div (10 \div 5)^2]^2$
9. $\frac{15 \div 3 + 2 \times 2}{\sqrt{25} \div 5 + 8 \div 2}$
10. $\frac{4 - (2 + 3)^2 - 6}{4(3 - 2) - 3^2}$
11. $\frac{8 - 12 \div 2 \times 3 - 4}{5^2 - 3^2 \times 2 - 3 \times 3}$
12. $\frac{8 - [4 - (3 - 3)]}{5 - (-2)^2 + 6 \div 2}$
13. $-2|-3| - \sqrt{36} \div |-2| + 3^2$

14. $\frac{6 - |-3| - 4|6 - 2|}{5 - 6 \times 2 \div |-4|}$
15. $\frac{2}{5}[\sqrt[3]{27} - |-9| + 4 - 3^2]^2$
16. $\frac{24 - 5 - 4^2}{|-8| - 12 \div 2(3)} + \frac{4 - (-3)^2 - |4|}{3^2 - 4 \times 3 + 7(5)}$
17. $\frac{4(-2 - 8 \div 4^2 \times |-8|)}{|5| - \sqrt[3]{-64}}$
18. $(-3)^3 - 2^2 - (-2)^2 + (4 - 4)^2$
19. $(0.2)^2 - (1.6)^2 - (3.2)^2$
20. $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 - \frac{5^2}{25}$
21. $(6^2 - 2) \div (\sqrt{36} - 4)$
22. $6 \div 2 + 12 - 3^2$
23. $24 \times 2 \div \frac{1}{3} \div 6$
24. $2\left[\frac{1}{2}(2 - 4) + 3 \times \frac{2}{3}\right]$
25. $3 \times \frac{1}{3} + [2 - 3]^3 \div 4$

3.11) EXPRESIONES ALGEBRAICAS

Si una o más cantidades, formadas por números y letras, son combinadas mediante los signos de operación, de agrupación y de relación, al resultado se le conoce como **expresión algebraica** o simplemente como **expresión**.

Por ejemplo:

$$a, -2a, \sqrt{3x}, (a+b)^2, \frac{2x^2+3y^3}{3x-2y}, (x+y)(x-y), -3xy$$

La expresión algebraica debe tener al menos una letra o variable y siempre nos representa una cantidad.

Ejemplos de expresiones algebraicas:

- 1) $7x^3y$
- 2) $\frac{3}{5}x^2y^4$
- 3) $-6x^7y + \frac{3x}{y^2}$
- 4) $-xyz + x^2yz - 4xyx^3$
- 5) $2x^3y - 3x^3 + 4y^3$
- 6) $\frac{2xy}{2x+3y}$
- 7) $\frac{6x+3y}{5xy}$

TÉRMINO: Es aquella expresión algebraica que contiene exclusivamente multiplicaciones y divisiones. Los términos se separan unos de otros mediante los signos + y -. Los términos pueden ser positivos o negativos y son al álgebra lo que las cantidades son al aritmética.

Ejemplos de términos:

$$-5xy^2, \frac{4xyz}{2wv}, \frac{1}{2}x^3y, 2x, -7abc, \frac{abc}{2x^5y^{-2}}, (x^{-3}y^6)^4, \sqrt[3]{xyz}$$

Los elementos de un término son 4, el signo, el grado, la parte literal y el coeficiente.

El signo puede ser positivo + o negativo -. En los términos que se escriben al principio de una expresión, se omite el signo +.

El grado de un término puede ser de dos tipos, absoluto y con relación a una letra.

GRADO ABSOLUTO: Es el que resulta de **sumar todos los exponentes** de las literales de un término.

Por ejemplo, el término $4xz^2y$ es de 4º Grado ($1 + 2 + 1 = 4$).

GRADO DE UN TÉRMINO CON RELACIÓN A UNA LETRA: es el exponente de cierta literal, así en la expresión $3xy^2z^3$, el término es de 1er. grado con respecto a “x”, de 2º Grado con respecto a “y” y de 3er. grado con respecto a “z”.

La **parte literal** de un término es aquella que no incluye a los números, es decir, la componen las letras y sus exponentes exclusivamente, por ejemplo en la expresión:

$-\frac{1}{4} a^2b^2$, a^2b^2 es la parte literal.

El coeficiente, es el número que acompaña a la parte literal. Así en las expresiones $45xy$, $-10b^2$ y $\frac{3}{4}xa^2z$; los coeficientes son 45, -10, y $\frac{3}{4}$ respectivamente.

De acuerdo con el número de términos, las expresiones algebraicas pueden ser monomios (un solo término), binomios (dos términos), trinomios (tres términos), etc., y polinomios (contienen dos o más términos), por lo que los binomios y trinomios también son polinomios.

Ejemplos:

$\frac{4xyz}{3a^2b}$	Monomio	$2x - 2y$	Binomio
$3x^2y + 2b^2z + 3bz^2$	Trinomio	$3x^2 + 2y^3 - 4x^7 + \frac{34x^2}{3yx}$	Polinomio

Las expresiones algebraicas siguientes, contienen más de un término y están separados por los signos + y -.

$(a + b)^2$	2 términos
$x + y + z$	3 términos
$ab + \frac{c}{d} - xyz + 2wt$	4 términos
$ax^5 - bx^4 + cx^3 - dx^2 + ex + f$	6 términos

Si una *expresión algebraica* contiene un número x de *términos*, entonces el número de signos + o - que aparecen en la expresión es igual al número de términos menos uno, es decir, $x - 1$.

En el Binomio que es la expresión algebraica de dos términos aparece solo un signo + o -.

En el Trinomio que es la expresión algebraica de tres términos aparecen solo dos signos + o -.

En el Polinomio que es la expresión algebraica de dos o más términos aparecerá un número de signos + o - **igual al número de términos disminuido en uno.**

GRADO DE UN TÉRMINO: Se obtiene sumando todos los exponentes de la parte literal del término.

Por ejemplo, Hallar el grado de los términos siguientes:

- 1) $2x^3y^4z^2$ Su grado es $3 + 4 + 2 = 9$.
- 2) $5x^5yz^4$ Su grado es $5 + 1 + 4 = 10$.
- 3) $-4xyz$ Su grado es $1 + 1 + 1 = 3$.
- 4) $-1/2 x^3y^4z$ Su grado es $3 + 4 + 1 = 8$.
- 5) $3/5 x^8y^2z$ Su grado es $8 + 2 + 1 = 11$.

El grado de un número o constante es 0. Así por ejemplo, de 4, -6, $\frac{1}{2}$, $-\frac{4}{3}$, su grado es 0. Como las constantes se representan por las primeras letras, resulta que el grado de a, b, c, d, e, es 0. Así por ejemplo, ax^2 , by^3 y cz^4 , son de segundo, tercero y cuarto grado respectivamente, ya que sólo se toman en cuenta los exponentes de las variables. En este caso, a, b y c son coeficientes o constantes.

GRADO DE UN POLINOMIO: Es el correspondiente al término de mayor grado, cuyo coeficiente sea distinto de cero.

lo tanto el grado del polinomio es 5.

$-7x^3 + 26x^5y^3z^2 + 2w^4x^3 - 3y^2z^3$ El grado de sus términos es de 3, 10, 7, y 5. Por lo tanto el grado del polinomio es 10.

$-12xy^4 + 13w^2 + 5v^4y^3 - 3x^2t^3$ El grado de sus términos es de 5, 2, 7 y 5. Por lo tanto el grado del polinomio es 7.

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ El grado de sus términos es de 4, 3, 2, 1 y 0.
Por lo tanto el grado del polinomio es 4.

En primer lugar, por favor no se me espanten por ver esas expresiones raras, con muchas combinaciones de números, letras y signos de operación. Lo único que les debe quedar claro es que a estas combinaciones se les denomina *expresiones algebraicas* y que los *términos* contienen sólo multiplicaciones y divisiones y que están separados por los signos + o -.

3.12) MULTIPLICACIÓN DE MONOMIOS

Siendo n un entero positivo, a^n se define como:

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \times a \times a \times a}_{n \text{ veces}}$$

Por lo tanto:

$$a^m a^n = \underbrace{a \times a \times a \times a \dots \times a}_{m \text{ factores}} \underbrace{a \times a \times a \times a \dots \times a}_{n \text{ factores}}$$

Por consiguiente, ya que la expresión de la derecha es el producto de $m + n$ factores, cada uno de ellos igual al factor a , se obtiene:

$$a^m a^n = a^{m+n} \quad (\text{EX1})$$

Es decir, cuando multiplicamos factores con la misma base, **sus exponentes se suman**. Si existen coeficientes numéricos, también se multiplican.

Ejemplo: Hallar el producto de $3x^5$ por $4x^2$

Solución: $(3x^5)(4x^2) = (3)(4)x^5 \cdot x^2$
 $= 12x^{5+2}$
 $= 12x^7$

Ejemplo: Hallar el producto de $-3x^6y^3$ por $\frac{1}{4}x^8y^5$

Solución: $(-3x^6y^3) \cdot (\frac{1}{4}x^8y^5) = (-3)(\frac{1}{4})x^6y^3 \cdot x^8y^5$
 $= -\frac{3}{4}x^{6+8}y^{3+5}$
 $= -\frac{3}{4}x^{14}y^8$

Ejercicio 10

Multiplicar los monomios siguientes:

- 1) $2x \cdot 3x^2 =$
- 2) $5x^2 \cdot -7x^3y =$
- 3) $\frac{1}{2}x^2yz \cdot 4xy^2t =$
- 4) $\frac{3}{8}x^4y^2z^3 \cdot 10x^{-2}y^{-1}z \cdot \frac{16}{9}xyz =$
- 5) $\frac{1}{4}x^3yt \cdot 16xy^2t^3 \cdot \frac{1}{2}x^ay^bt^c =$
- 6) $2a^mb \cdot 5a^3b^n =$
- 7) $\frac{5}{8}x^my^n \cdot -\frac{32}{10}x^{2m}y^{3n} =$
- 8) $\frac{7}{2}x^{2+m}y^{3+n}z^4 \cdot -6x^{m-1}y^{n-2}z^{2+4n} =$
- 9) $\frac{3}{8}x^ny^{2m}z^{3n} \cdot 10x^{m+2}y^{n-1}z^n \cdot \frac{5}{18}xyz =$
- 10) $\frac{1}{4}x^{a+5}y^{b+3}t^{3a} \cdot 16xy^2t^3 \cdot \frac{1}{2}x^{a+1}y^{b+2}t^{c+3} =$

3.13) POTENCIA DE POTENCIA

Cuando una expresión que está dentro de paréntesis se eleva a una potencia, todo lo que está dentro de paréntesis es la base.

Por ejemplo:

$$(5y)^3 = 5y \times 5y \times 5y = (5)(5)(5)y^{1+1+1} = 125y^3$$

$$(2w)^6 = 2w \times 2w \times 2w \times 2w \times 2w \times 2w = (2)(2)(2)(2)(2)(2)w^{1+1+1+1+1+1} = 64w^6$$

$$(3^2 a^3 b)^2 = 3^2 a^3 b \times 3^2 a^3 b = (3^2)(3^2) (a^3) (a^3) (b)(b) = 3^{2+2} a^{3+3} b^{1+1} = 3^4 a^6 b^2$$

Es muy importante tomar en cuenta los signos, al hacer las operaciones, ya que es diferente si el signo está fuera o dentro de un paréntesis.

Por ejemplo:

$$-(5y)^3 = - (5y \times 5y \times 5y) = - ((5)(5)(5) y^{1+1+1}) = - 125 y^3$$

Aquí el signo menos está antes del paréntesis, por lo que hará negativo todo el resultado.

$$(-2w)^4 = -2w \times -2w \times -2w \times -2w = (-2)(-2)(-2)(-2) w^{1+1+1+1} = 16 w^4$$

Aquí el signo menos está dentro del paréntesis, por lo que debe de tomarse en cuenta al realizar la operación y utilizar la ley de los signos que nos dice “**al multiplicar o dividir cantidades de signos iguales da positivo y signos distintos dará negativo**”

Si utilizamos (EX1) para hallar la potencia de una potencia, se tiene:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \times a^m \times a^m \times a^m \dots \times a^m}_{n \text{ factores}}$$

Por lo tanto:

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n} \quad (\text{EX2})$$

Es decir, cuando elevamos una potencia a otra potencia, **sus exponentes se multiplican**.

Ejemplo: Hallar $(x^2)^4$

Solución: $(x^2)^4 = x^{2 \times 4} = x^8$

Otra forma es: $(x^2)^4 = x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 \cdot x^2 = x^{2+2+2+2} = x^8$

Ejemplo: Hallar $(5x^4)^3$

Solución: $(5x^4)^3 = (5)^3 x^{4 \times 3} = 125 x^{12}$

Otra forma es: $(5x^4)^3 = (5x^4) (5x^4) (5x^4) = 125 x^{4+4+4} = 125 x^{12}$

Observe, que es preferible utilizar la regla (EX2) a usar el procedimiento normal o tradicional, porque con la regla es más fácil y directo obtener el resultado.

Otra regla que puede deducirse de la (EX2) es:

$$(ab)^m = a^m b^m \quad (EX2)$$

Es decir, cuando elevamos un producto a una potencia m , cada uno de sus factores quedará elevado a la potencia m .

Ejemplo: Hallar $(6 \times 5)^4$

Solución: $(6 \times 5)^4 = 6^4 \times 5^4 = 1296 \times 625 = 810\,000$

Otra forma es: $(6 \times 5)^4 = (30)^4 = 30 \times 30 \times 30 \times 30 = 810\,000$

Ejercicio 11 **Evaluar las potencias de potencia:**

$$\begin{aligned} 1) & (3x^2)^5 = \\ 2) & (5^2 x^2 y^3 z)^3 = \\ 3) & \left(\frac{1}{2} x^2 y^2 t^{\frac{1}{4}}\right)^4 = \\ 4) & \left(\frac{3}{8} x^{4a} y^{2b} z^{3c}\right)^{-2} = \\ 5) & \left(\frac{5}{4} x^3 y^2 t^3\right)^{2m} = \\ 6) & (2a^{\frac{3}{2}} a^{\frac{3}{4}} b^{2n})^8 = \\ 7) & \left(\frac{16}{81} x^{2m+2} y^{4n+4} z^{8n-6}\right)^{\frac{1}{2}} = \end{aligned}$$

3.14) CONVERSIÓN DE EXPONENTES NEGATIVOS A POSITIVOS

Si se tiene a^{-m} y multiplicamos y dividimos por a^m , la expresión no se altera, porque estamos multiplicando por 1. Además, aplicando la propiedad de que toda cantidad no nula elevada a la cero potencia es igual a la unidad, $a^0 = 1$, se tiene:

$$a^{-m} \times \frac{a^m}{a^m} = \frac{a^{-m+m}}{a^m} = \frac{a^0}{a^m} = \frac{1}{a^m}$$

Es decir:

$$\frac{1}{a^{-m}} = a^m$$

(EX3)

De la misma manera, se obtiene:

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$$

(EX 4)

Esto es, que al cambiar una potencia del numerador al denominador o viceversa, debemos cambiarle de signo a su exponente.

Ejemplos: Evaluar

$$1) \frac{1}{x^{-5}} = x^5$$

$$2) \frac{1}{4x^{-2}} = \frac{x^2}{4}$$

$$3) \frac{7}{3x^{-5}} = \frac{7 \times x^5}{3}$$

$$4) x^{-7} = \frac{1}{x^7}$$

$$5) 5x^{-6} = \frac{5}{x^6}$$

$$6) \frac{5x^{-8}}{3} = \frac{5}{3} \times \frac{1}{x^8} = \frac{5}{3x^8}$$

$$7) \frac{2^{-3}}{4^{-2}} = \frac{4^2}{2^3} = \frac{4 \times 4}{2 \times 2 \times 2} = \frac{16}{8} = 2$$

$$8) \frac{7^3}{7^{-2}} = 7^3 \times 7^2 = 7^{3+2} = 7^5 = 16807$$

$$9) \frac{8}{2^{-4}} = 8 \times 2^4 = 2^3 \times 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$$

$$10) \frac{5^{-7}}{5^{-11}} = \frac{5^{11}}{5^7} = \frac{5^{7+4}}{5^7} = \frac{5^7 \times 5^4}{5^7} = 5^4 = 625$$

Ejercicio 12 Transformar a exponentes positivos las expresiones siguientes:

1) $\frac{1}{x^{-4}} =$

2) $\frac{1}{3x^{-2}} =$

3) $x^{-4} =$

4) $8x^{-2} =$

5) $\frac{3x^{-5}}{4} =$

6) $\frac{9}{5x^{-6}} =$

7) $\frac{2^{-2}}{4^{-3}} =$

8) $\frac{5^{-2}}{25} =$

9) $\frac{32}{3^{-2}} =$

10) $\frac{x^{-4}}{x^{-6}} =$

11) $\frac{8x^2y^{-2}}{2x^{-3}y^4} =$

UNIDAD IX

3.15) DIVISIÓN DE MONOMIOS

Para una división con la misma base en el dividendo y en el divisor, el resultado de ésta operación está dado por:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

(EX 5)

Es decir, cuando dividimos cantidades con la misma base, al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor, es decir, **sus exponentes se restan**.

Demostración:

Si aplicamos la propiedad (EX 4) y luego la propiedad de la multiplicación de potencias (EX 1), se tiene:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^m \times a^{-n} = a^{m+(-n)} = a^{m-n}$$

Con lo que se comprueba la expresión (EX 5).

Ejemplos:

1) Hallar el cociente de dividir $12x^7$ entre $3x^4$

$$\text{Solución: } \frac{12x^7}{3x^4} = \frac{12}{3} x^{7-4} = 4x^3$$

2) Hallar el cociente de dividir $36x^{-4}$ entre $8x^2$

$$\text{Solución: } \frac{36x^{-4}}{8x^2} = \frac{36}{8} x^{-4-2} = \frac{18}{4} x^{-6} = \frac{9}{2} x^{-6} = \frac{9}{2x^6}$$

3) Hallar el cociente de dividir $13x^{-2}$ entre $4x^{-5}$

$$\text{Solución: } \frac{13x^{-2}}{4x^{-5}} = \frac{13}{4} x^{-2-(-5)} = \frac{13}{4} x^{-2+5} = \frac{13}{4} x^3$$

4) Hallar el cociente de dividir $12x^9$ entre $90x^{13}$

$$\text{Solución: } \frac{12x^9}{90x^{13}} = \frac{12}{90} x^{9-13} = \frac{6}{45} x^{-4} = \frac{2}{15} x^{-4} = \frac{2}{15x^4}$$

5) Hallar el cociente de dividir $5x^{4m+2}y^{2n+3}$ entre $10x^{m+1}y^{n+1}$

$$\text{Solución: } \frac{5x^{4m+2}y^{2n+3}}{10x^{m+1}y^{n+1}} = \frac{5}{10} x^{4m+2-(m+1)} y^{2n+3-(n+1)} = \frac{1}{2} x^{4m+2-m-1} y^{2n+3-n-1} = \frac{1}{2} x^{3m+1} y^{n+2}$$

6) Hallar el cociente de dividir $80a^{4x}b^{2y}$ entre $48a^{2x-3}b^{y-4}$

$$\text{Solución: } \frac{80a^{4x}b^{2y}}{48a^{2x-3}b^{y-4}} = \frac{10}{6} a^{4x-(2x-3)} b^{2y-(y-4)} = \frac{5}{3} a^{4x-2x+3} b^{2y-y+4} = \frac{5}{3} a^{2x+3} b^{y+4}$$

Nota que no importa que los exponentes sean letras, ya que de todos modos a los exponentes del numerador se le restan los del denominador y que los coeficientes numéricos también se dividieron.

Si consideramos el caso en que el dividendo es igual al divisor, se tiene:

$$\frac{a^m}{a^m} = 1$$

Ya que toda cantidad dividida entre sí misma es igual a la unidad. Pero si aplicamos la regla (EX 5), se tiene:

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-m} = a^0$$

Esto solo se cumple si $a^0 = 1$. Lo cual se enuncia como: ***toda cantidad elevada a la cero potencia es igual a la unidad***. Siempre que la cantidad sea diferente de cero.

Ejercicio 13

Realizar las divisiones de monomios siguientes:

1) $\frac{15x^3}{3x} =$

2) $\frac{8x^4y^3}{2x^2y^5} =$

3) $\frac{2a^5b^7}{4a^2b^3} =$

4) $\frac{4x^{m+3}}{2x^{m+1}} =$

5) $\frac{12a^{2m-1}b^{x-3}}{-3a^{m+3}b^{3x-2}} =$

6) $\frac{a^{x+3}b^{m+2}}{a^{x+2}b^{m+1}} =$

7) $\frac{a^{m+n}b^{x+a}}{a^mb^a} =$

8) $\frac{\frac{2}{3}x^ay^b}{\frac{4}{9}x^2y^{-3}} =$

9) $\frac{3m^4n^5p^6}{-\frac{1}{3}m^4np^5} =$

10) $\frac{-2x^{a+4}z^{b-3}}{-\frac{1}{2}x^4z^3} =$

11) $\frac{16x^2y^7}{4x^5y^4} =$

UNIDAD X

3.16) OPERACIONES CON POLINOMIOS

POLINOMIO: Es la expresión algebraica que se compone de dos o más términos. En el que cada término es entero y racional con respecto a las literales.

Ejemplos de polinomios:

- 1) $5x^2 - 2xy^4 + 4y^2$
- 2) $-7x^3 + 26x^5y^3z^2 + 2w^4x^3 - 3y^2z^3$
- 3) $-12xy^4 + 13w^2 + 5v^4y^3 - 3x^2t^3$

No son polinomios los siguientes:

$2x^3 - \frac{7}{x}$; este último término no es entero en x
 $2\sqrt{y} + 3x^2$; el primer término no es racional

3.16.1) SUMA DE POLINOMIOS

REGLA PARA REALIZAR UNA SUMA DE POLINOMIOS:

Identifique los términos semejantes. Sume algebraicamente los coeficientes de los términos semejantes, **dejando el resultado con la misma parte literal**, a esto también se le llama **reducción de términos semejantes**. Generalmente, los sumandos se escriben unos debajo de otros en forma de renglones, dejando los términos semejantes alineados por columna y después procedemos a realizar la suma algebraica de los coeficientes de los términos semejantes. Los términos que no sean semejantes solo se bajan y colocan en el resultado.

Ejemplos:

- 1) Sume solamente los coeficientes, **sin cambiar la parte literal**.
Ejemplo:

$$3x^2z + 7x^2z = 10x^2z$$

- 2) En caso de que los términos no sean semejantes deje indicada la operación.

$$10x^2z + 10xz^2 = 10x^2z + 10xz^2$$

3) Sumar $10x^4 + 5x^3 + 3x^2 - 7x + 12$ con $2x^3 - 6x^2 + 11x - 10$
y con $-4x^3 + 5x^2 + 4x - 3$

Colocando un sumando debajo de otro en forma de renglón y colocando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

$10x^4$	$+ 5x^3$	$+ 3x^2$	$- 7x$	$+ 12$
	$+ 2x^3$	$- 6x^2$	$+ 11x$	$- 10$
	$- 4x^3$	$+ 5x^2$	$+ 4x$	$- 3$
$10x^4$	$+ 3x^3$	$+ 2x^2$	$+ 8x$	$- 1$

Note que la parte literal no sufre ningún cambio y solo cambia el coeficiente, que resulta de sumar algebraicamente los coeficientes de los términos semejantes.

4) Sumar $16x^5 - 8x^4 + 7x^3 + 2x^2 - 5x + 13$ con $-9x^5 - 6x^4 + 5x^2 - 10$
Con $2x^4 + 3x^2 - x - 9$ y con $-6x^5 + 3x^4 + 2x^3 + 4x^2 - 2x - 17$

Colocando un sumando debajo de otro en forma de renglón y colocando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

$16x^5$	$- 8x^4$	$+ 7x^3$	$+ 2x^2$	$- 5x$	$+ 13$
$- 9x^5$	$- 6x^4$		$+ 5x^2$		$- 10$
	$+ 2x^4$		$+ 3x^2$	$- x$	$- 9$
$- 6x^5$	$+ 3x^4$	$+ 2x^3$	$+ 4x^2$	$- 2x$	$- 17$
x^5	$- 9x^4$	$+ 9x^3$	$+ 14x^2$	$- 8x$	$- 23$

5) Sumar $-4x^4 + 3x^3 - 6x + 11$ con $14x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 7x^2$
Con $-3x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 3x - 21$ y con $-6x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 2x - 8$

Colocando un sumando debajo de otro en forma de renglón y colocando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

	$- 4x^4$	$+ 3x^3$		$- 6x$	$+ 11$
$14x^5$	$- 5x^4$	$+ 4x^3$	$+ 7x^2$		
$- 3x^5$	$+ 2x^4$	$- 5x^2$		$- 3x$	$- 21$
$- 6x^5$	$+ 5x^4$	$+ 2x^3$		$+ 2x$	$- 8$
$5x^5$	$- 2x^4$	$+ 4x^3$	$+ 7x^2$	$- 7x$	$- 18$

De la misma forma se procede si los coeficientes son fraccionarios o quebrados.

Ejemplos:

6) Sumar $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + 9$ con $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$
y con $-\frac{1}{5}x^3 + x^2 + \frac{1}{4}x - 1$

Colocando un sumando debajo de otro en forma de renglón y colocando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, aplicando la suma y resta de quebrados o fracciones, se obtiene:

$\frac{1}{2}x^4$	$+ \frac{1}{2}x^3$	$+ \frac{1}{3}x^2$	$- x$	$+ 9$
	$+ \frac{1}{3}x^3$	$- \frac{1}{4}x^2$	$+ \frac{1}{2}x$	$- 7$
	$- \frac{1}{5}x^3$	$+ x^2$	$+ \frac{1}{4}x$	$- 1$
$\frac{1}{2}x^4$	$+ \frac{19}{30}x^3$	$+ \frac{13}{12}x^2$	$- \frac{1}{4}x$	$+ 1$

Los coeficientes se obtienen realizando la suma y resta de quebrados:

Para el coeficiente de x^3 , se tiene :

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{15+10-6}{30} = \frac{19}{30}$$

Para el coeficiente de x^2 , se tiene :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 1 = \frac{4-3+12}{12} = \frac{13}{12}$$

Para el coeficiente de x , se tiene :

$$-1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-8+4+2}{8} = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$$

7) Sumar $\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{2}$ con $-2x^5 - 3x^4 + x^2 - \frac{1}{4}$
Con $\frac{1}{5}x^4 + \frac{3}{8}x^2 - x - 2$ y con $-\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{7}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

Colocando un sumando debajo de otro en forma de renglón y colocando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

$\frac{1}{2} x^5$	$- \frac{1}{4} x^4$	$+ \frac{1}{4} x^3$	$+ 2x^2$	$- \frac{2}{3} x$	$+ \frac{1}{2}$
$- 2x^5$	$- 3x^4$		$+ x^2$		$- \frac{1}{4}$
	$+ \frac{1}{5} x^4$		$+ \frac{3}{8} x^2$	$- x$	$- 2$
$- \frac{2}{5} x^5$	$+ \frac{3}{4} x^4$	$+ \frac{2}{7} x^3$	$+ \frac{3}{4} x^2$	$- 2x$	$+ \frac{1}{2}$
$- \frac{19}{10} x^5$	$- \frac{23}{10} x^4$	$+ \frac{15}{28} x^3$	$+ \frac{33}{8} x^2$	$- \frac{11}{3} x$	$- \frac{5}{4}$

Los coeficientes se obtienen realizando la suma y resta de quebrados:

Para el coeficiente de x^5 , se tiene:

$$\frac{1}{2} - 2 - \frac{2}{5} = \frac{5 - 20 - 4}{10} = \frac{-19}{10}$$

Para el coeficiente de x^4 , se tiene:

$$-\frac{1}{4} - 3 + \frac{1}{5} + \frac{3}{4} = \frac{-5 - 60 + 4 + 15}{20} = \frac{-46}{20} = -\frac{23}{10}$$

Para el coeficiente de x^3 , se tiene:

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{7} = \frac{7 + 8}{28} = \frac{15}{28}$$

Para el coeficiente de x^2 , se tiene:

$$2 + 1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{4} = 3 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} = 3 + \frac{9}{8} = \frac{24 + 9}{8} = \frac{33}{8}$$

Para el coeficiente de x , se tiene:

$$-\frac{2}{3} - 1 - 2 = -\frac{2}{3} - 3 = \frac{-2 - 9}{3} = -\frac{11}{3}$$

Para los números:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 2 + \frac{1}{2} = \frac{4 - 2 - 16 + 4}{8} = -\frac{10}{8} = -\frac{5}{4}$$

EJERCICIO 14 Realice las siguientes sumas de polinomios:

1. $3x^2 + 2x^2 + 3y$

2. $4a^2 + 4ab + 5b^2 + 3a^2 + 3ab$

$$3. \frac{3}{4}a^2 + \frac{5}{3}a^2 + 2a^2$$

$$4. 7x^2yz^3 + 15x^2yz^3 + 7x^2yz^2$$

$$5. 3wx^2 + 5xy + 4x^2w$$

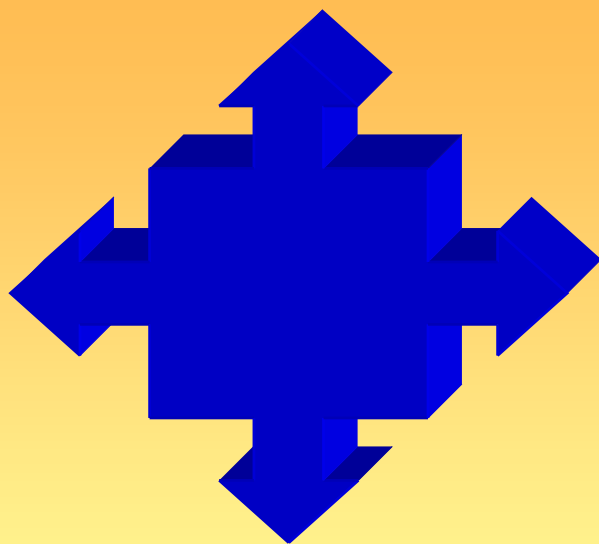
$$6. 7a^2c + 7ca + 2ca^2 + 8ca$$

$$7. \frac{5}{8}h^2zx^3 + 5zx^3h^2 + \frac{3}{4}h^2x^3z$$

$$8. \frac{9}{3}h + 7h$$

$$9. 3x^2xz^2z + 3xx^2y + 4x^2z^2xz$$

$$10. 3\sqrt{x} + 9x^{\frac{1}{2}} + 3\sqrt[4]{x^2}$$



UNIDAD XI

3.16.2) RESTA DE POLINOMIOS

El procedimiento para restar polinomios es el mismo que para sumarlos, sólo debemos cambiarle signo a cada uno de los términos del sustraendo y después procedemos igual que para la suma. Otra diferencia es que la resta sólo se realiza entre dos polinomios, uno de los cuales será el minuendo y el otro será el sustraendo.

Ejemplos:

El sustraendo es lo que restamos, es decir, es el polinomio que aparece después de la palabra *restar*. El minuendo es el polinomio al cual se le resta y aparece después de la palabra *de*.

$$\begin{array}{l} 1) \quad \text{De } 4x^2 + 7y^2z + 3z \\ \text{restar } -5x^2 + 9y^2z + 2z \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 4x^2 + 7y^2z + 3z \\ +5x^2 - 9y^2z - 2z \\ \hline + 9x^2 - 2y^2z + z \end{array}$$

Obsérvese como la segunda expresión cambió de signo, esto se debe a que la palabra *restar* implica un signo menos (-), el cual afecta a toda la expresión, lo que produce el cambio de signos en los términos del sustraendo.

$$2) \quad \text{De } 7x^5 - 4x^4 + 3x^3 - 6x + 11 \quad \text{restar} \quad 14x^5 - 5x^4 + 4x^3 + 7x^2 - 5$$

Colocando el sustraendo con los signos de sus términos cambiados debajo del minuendo y alineando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

$$\begin{array}{r} 7x^5 \quad - 4x^4 \quad + 3x^3 \quad \quad \quad - 6x \quad + 11 \\ -14x^5 \quad + 5x^4 \quad - 4x^3 \quad - 7x^2 \quad \quad \quad + 5 \\ \hline -7x^5 \quad + x^4 \quad - x^3 \quad - 7x^2 \quad - 6x \quad + 16 \end{array}$$

$$3) \quad \text{De } -3x^5 + 2x^4 - 5x^2 - 3x - 21 \quad \text{restar} \quad -6x^5 + 5x^4 + 2x^3 + 2x - 8$$

Colocando el sustraendo con los signos de sus términos cambiados debajo del minuendo y alineando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 -3x^5 \qquad +2x^4 \qquad \qquad -5x^2 \qquad -3x \qquad -21 \\
 +6x^5 \qquad -5x^4 \qquad -2x^3 \qquad \qquad -2x \qquad +8 \\
 \hline
 -3x^5 \qquad -3x^4 \qquad -2x^3 \qquad -5x^2 \qquad -5x \qquad -13
 \end{array}$$

De la misma forma se procede si los coeficientes son fraccionarios o quebrados.

Ejemplos:

4) Restar $\frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{3}x^2 - x + 9$ de $\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - 7$

El sustraendo aparece primero y el minuendo después. Colocando el sustraendo con los signos de sus términos cambiados debajo del minuendo y alineando por columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, aplicando la suma y resta de quebrados o fracciones, se obtiene:

$$\begin{array}{r}
 \qquad \qquad + \frac{1}{3}x^3 \qquad \qquad - \frac{1}{4}x^2 \qquad \qquad + \frac{1}{2}x \qquad - 7 \\
 - \frac{1}{2}x^4 \qquad - \frac{1}{2}x^3 \qquad - \frac{1}{3}x^2 \qquad + x \qquad - 9 \\
 \hline
 - \frac{1}{2}x^4 \qquad - \frac{1}{6}x^3 \qquad - \frac{7}{12}x^2 \qquad + \frac{3}{2}x \qquad - 16
 \end{array}$$

Los coeficientes se obtienen realizando la suma y resta de quebrados:

Para el coeficiente de x^3 , se tiene :

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6}$$

Para el coeficiente de x^2 , se tiene :

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-3-4}{12} = -\frac{7}{12}$$

Para los números :

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{2} = \frac{3}{2}$$

5) Restar $\frac{1}{2}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^3 + 2x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}$ de $-\frac{2}{5}x^5 + \frac{3}{4}x^4 + \frac{2}{7}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 2x + \frac{1}{2}$

El sustraendo aparece primero y el minuendo después. Colocando el sustraendo con los signos de sus términos cambiados debajo del minuendo y alineando por

columna los términos semejantes, después sumando algebraicamente los coeficientes, aplicando la suma y resta de quebrados o fracciones, se obtiene:

$- \frac{2}{5} x^5$	$+ \frac{3}{4} x^4$	$+ \frac{2}{7} x^3$	$+ \frac{3}{4} x^2$	$- 2x$	$+ \frac{1}{2}$
$- \frac{1}{2} x^5$	$+ \frac{1}{4} x^4$	$- \frac{1}{4} x^3$	$- 2 x^2$	$+ \frac{2}{3} x$	$- \frac{3}{4}$
$- \frac{9}{10} x^5$	$+ x^4$	$+ \frac{1}{28} x^3$	$- \frac{5}{4} x^2$	$- \frac{7}{12} x$	$- \frac{1}{4}$

Los coeficientes se obtienen realizando la suma y resta de quebrados:

Para el coeficiente de x^5 , se tiene :

$$-\frac{2}{5} - \frac{1}{2} = \frac{-4-5}{10} = -\frac{9}{10}$$

Para el coeficiente de x^4 , se tiene :

$$\frac{3}{4} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

Para el coeficiente de x^3 , se tiene :

$$\frac{2}{7} - \frac{1}{4} = \frac{8-7}{28} = \frac{1}{28}$$

Para el coeficiente de x^2 , se tiene :

$$\frac{3}{4} - 2 = \frac{3-8}{4} = -\frac{5}{4}$$

Para el coeficiente de x , se tiene :

$$-\frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-3-4}{12} = -\frac{7}{12}$$

Para los números, se tiene :

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{2-3}{4} = -\frac{1}{4}$$

EJERCICIO 15. Realizar la de resta de polinomios siguientes:

- Restar $3xy + 2xz$ de $4xz - 3xy$
- Restar $3z^2 + 5xy - 4$ de $3xy - 2z^2 + 5$
- Restar $4xz + 2xyz - 2x^2z^2$ de $5xz - 2x^2z^2 - 4xyz$

4. Restar $\frac{3}{4}a + \frac{5}{2}b^2c - 4c$ de $5a - \frac{7}{2}b^2c + 5c$

5. Restar $10az - \frac{4}{3}b^2 - 2xy$ de $2xy + \frac{5}{8}az - 12b^2$

6. Restar $9xz^2 - 15w^2 - \frac{9}{5}z$ de $\frac{11}{2}w^2 + 13z + 10xz^2$

7. Restar $12x^2 + 15zw^{-4}$ de $\frac{14}{x^2} + 15zw^{-4}$

8. Restar $10a^2 + 9bc^2 + 7x^2yz$ de $24x^2yz - 15a^2 - 9bc^2$

9. Restar $4xyz + 9x^2 + 6a^2b^2$ de $12x^2 - \sqrt{36x^2y^2z^2} + (3ab)^2$

10. Restar $12z^x + 15x^{\frac{1}{2}} - 10e^x$ de $15z^x + 3e^x - 12\sqrt{x}$

UNIDAD XII

3.16.3) MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS

Se multiplican todos y cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los del segundo polinomio. Se aplican las reglas de la potenciación, la ley de los signos y las propiedades asociativa y distributiva de la multiplicación.

Sigue también las reglas siguientes:

Los coeficientes se multiplicarán por los coeficientes.

Cuando dos literales iguales se multipliquen, sus exponentes se suman.

Ejemplo: $x \cdot x = x^2$ $3x^2y \cdot 5xy = (3)(5) x^{2+1}y^{1+1} = 15x^3y^2$

Si las expresiones que se multiplican no contienen las mismas literales, sólo se multiplican los coeficientes y se añaden las literales de una expresión a otra, de tal manera que la expresión resultante contenga todas las literales de las expresiones participantes. Ejemplo: $(3xy + 4z) 2c = 6cxy + 8cz$

Ejemplos:

1) Multiplicar los monomios $2x^3y^4$ por $-5x^4y^5$ y por $-3xy$

Solución:

Escribimos el producto como: $(2x^3y^4)(-5x^4y^5)(-3xy)$

Multiplicando los coeficientes, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación:

$$(2)(-5)(-3)x^{3+4+1}y^{4+5+1}$$

Finalmente, el producto es: $30x^8y^{10}$

2) Multiplicar el monomio $6x^3y^4$ por el polinomio $-3x^6y^3 - 7x^2y^4 + 5x^5y^2$

Solución:

Escribimos el producto como: $(6x^3y^4)(-3x^6y^3 - 7x^2y^4 + 5x^5y^2)$

Multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación:

$$(6)(-3)x^{3+6}y^{4+3} + (6)(-7)x^{3+2}y^{4+4} + (6)(5)x^{3+5}y^{4+2}$$

Finalmente, el producto es: $-18x^9y^7 - 42x^5y^8 + 30x^8y^6$

3) Multiplicar el polinomio $3x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3$ por el polinomio $3xy^2 - 7x^2y + 5x^3$

Solución:

Escribimos el producto como: $(3x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3)(3xy^2 - 7x^2y + 5x^3)$

Multiplicando los términos del primer polinomio por cada uno de los términos del segundo polinomio, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación.

Al final, si existen términos semejantes, debemos sumarlos para obtener el resultado deseado.

Note que como el primer polinomio tiene 3 términos y el segundo también, se obtendrá un producto de $(3)(3) = 9$ términos, antes de hacer la reducción de términos semejantes.

$$(3x^4y - 2x^3y^2 + x^2y^3)(3xy^2 - 7x^2y + 5x^3) \\ = 9x^5y^3 - 21x^6y^2 + 15x^7y - 6x^4y^4 + 14x^5y^3 - 10x^6y^2 + 3x^3y^5 - 7x^4y^4 + 5x^5y^3$$

Reduciendo términos semejantes:

$$= 9x^5y^3 + 14x^5y^3 + 5x^5y^3 - 21x^6y^2 - 10x^6y^2 + 15x^7y - 6x^4y^4 - 7x^4y^4 + 3x^3y^5$$

Finalmente, el producto es:

$$= 28 x^5 y^3 - 31 x^6 y^2 - 13 x^4 y^4 + 15 x^7 y + 3 x^3 y^5$$

La multiplicación de polinomios puede abreviarse en gran manera, si utilizamos el método siguiente: primero ordenamos ambos polinomios en sus potencias decrecientes con relación a una letra, después, realizamos los productos de cada uno de los términos del primer polinomio por cada uno de los del segundo polinomio. En el desarrollo, colocamos alineados por columna los términos semejantes que resulten y al final hacemos la suma algebraica, dándonos esto el producto buscado.

4) Multiplicar el polinomio $2x^4y^2 - 8x^3y^3$ por el polinomio $5x^3y^2 - 4x^2y^3 + 2xy^4$

Solución:

Escribimos el producto como: $(2x^4y^2 - 8x^3y^3)(5x^3y^2 - 4x^2y^3 + 2xy^4)$

Note que como el primer polinomio tiene 2 términos y el segundo tiene 3, se obtendrá un producto de $(2)(3) = 6$ términos, antes de hacer la reducción de términos semejantes. Observe que ambos polinomios están ordenados en potencias decrecientes de la letra x .

Si es el caso, colocamos en primer lugar el polinomio que tenga más términos. Si los polinomios tienen el mismo número de términos, se coloca cualquiera de ellos arriba y el otro debajo de él.

Esto es:

$5x^3y^2$	$- 4x^2y^3$	$+ 2xy^4$	
	$2x^4y^2$	$- 8x^3y^3$	
$10 x^7y^4$	$- 8 x^6y^5$	$+ 4 x^5y^6$	
	$- 40 x^6y^5$	$+ 32 x^5y^6$	$- 16 x^4y^7$
$10 x^7y^4$	$- 48 x^6y^5$	$+ 36 x^5y^6$	$- 16 x^4y^7$

Note que se empieza a multiplicar por la izquierda, aunque se pudo haber empezado por la derecha. En este caso, debe hacerse así debido a que se ordenaron los términos en potencias decrecientes en ambos factores.

5) Multiplicar el polinomio $3x + 5y - 6z$ por el polinomio $- 2x - 8xy + 6xz + 3y + 4z$

Solución:

Note que como el primer polinomio tiene 3 términos y el segundo tiene 5, se obtendrá un producto de $(3)(5) = 15$ términos, antes de hacer la reducción de términos semejantes. Observe que en este caso, todos los términos son del mismo grado con relación a una letra, por lo cual se pueden ordenar de cualquier manera, en este caso se ordenan alfabéticamente.

Colocamos en primer lugar el polinomio que tenga más términos.

Esto es:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 -2x & -8xy & +6xz & +3y & +4z & & & & \\
 & & 3x & +5y & -6z & & & & \\
 \hline
 -6x^2 & -24x^2y & +18x^2z & +9xy & +12xz & & & & \\
 & & & -10xy & & -40xy^2 & +30xyz & +15y^2 & +20yz \\
 & & & & +12xz & & +48xyz & & -18yz & -36xz^2 & -24z^2 \\
 \hline
 -6x^2 & -24x^2y & +18x^2z & -xy & +24xz & -40xy^2 & +78xyz & +15y^2 & +2yz & -36xz^2 & -24z^2
 \end{array}$$

MULTIPLICACIÓN DE POLINOMIOS CON COEFICIENTES FRACCIONARIOS

Cuando se multiplican polinomios con coeficientes fraccionarios, se procede de la misma forma, pero tomando en cuenta la multiplicación de fracciones o quebrados.

Ejemplos:

1) Multiplicar los monomios $\frac{1}{2} x^3 y^4$ por $-\frac{1}{4} x^4 y^5$ y por $-\frac{3}{4} xy$

Solución:

Escribimos el producto como: $(\frac{1}{2} x^3 y^3) (-\frac{1}{4} xy^7) (-\frac{3}{4} x^6 y)$

Multiplicando los coeficientes fraccionarios, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación:

$$\frac{2+1+6}{2+1+6} y^{3+7+1}$$

Finalmente, el producto es: $\frac{3}{32} x^9 y^{11}$

2) Multiplicar los monomios $\frac{1}{2} x^3 y^5$ por $-\frac{3}{4} x^7 y^3$ y por $12 x^5 y^8$

Solución:

Escribimos el producto como: $(\frac{1}{2} x^{3m}y^{5n})(-\frac{3}{4} x^7y^3)(12 x^5y^8)$

Multiplicando los coeficientes fraccionarios, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación: $(\frac{1}{2})(-\frac{3}{4})(12)x^{3m+7+5}y^{5n+3+8}$

Finalmente, el producto es: $-\frac{9}{2} x^{3m+12}y^{5n+11}$

Nota como al sumar los exponentes, se sumaron letras con letras y números con números, es decir, se suman los términos semejantes.

3) Multiplicar los monomios $-\frac{1}{4} x^{3a+5}y^{4b+3}$ por $-16 x^{4a-2}y^{3b-2}$ y por $-\frac{3}{4} x^{6-2a}y^{8-2b}$

Solución: Escribimos el producto como:

$$(-\frac{1}{4} x^{3a+5}y^{4b+3})(-16 x^{4a-2}y^{3b-2})(-\frac{3}{4} x^{6-2a}y^{8-2b})$$

Multiplicando los coeficientes fraccionarios, es decir, numerador por numerador y denominador por denominador, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación: $(-\frac{1}{4})(-16)(-\frac{3}{4})x^{3a+4a-2a+5-2+6}y^{4b+3b-2b+3-2+8}$

Finalmente, el producto es: $-3 x^{5a+9}y^{5b+9}$

4) Multiplicar el monomio $\frac{1}{2} x^2y^3$ por el polinomio $-\frac{3}{4} x^5y^2 - 7x^3y + \frac{2}{5} x^4y^5$

Solución:

Escribimos el producto como: $(\frac{1}{2} x^2y^3)(-\frac{3}{4} x^5y^2 - 7x^3y + \frac{2}{5} x^4y^5)$

Multiplicando el monomio por cada uno de los términos del polinomio, usando la ley de los signos y las propiedades de la potenciación:

$$(\frac{1}{2})(-\frac{3}{4})x^{2+5}y^{3+2} + (\frac{1}{2})(-7)x^{2+3}y^{3+1} + (\frac{1}{2})(\frac{2}{5})x^{2+4}y^{3+5}$$

Finalmente, el producto es: $-\frac{3}{8} x^7y^5 - \frac{7}{2} x^5y^4 + \frac{1}{5} x^6y^8$

5) Multiplicar el polinomio $\frac{1}{2} x^4y - \frac{1}{4} x^3y^2$ por el polinomio $\frac{3}{4} xy^2 + 4 x^2y - 8 x^3$

Solución: Escribimos el producto como: $(\frac{1}{2} x^4y - \frac{1}{4} x^3y^2) (\frac{3}{4} xy^2 + 4 x^2y - 8 x^3)$

Esto es:

$\frac{3}{4} xy^2$	$+ 4x^2y$	$- 8x^3$	
	$\frac{1}{2} x^4y$	$- \frac{1}{4} x^3y^2$	
$\frac{3}{8} x^5y^3$	$+ 2 x^6y^2$	$- 4 x^7y$	
$- x^5y^3$	$+ 2 x^6y^2$		$- \frac{3}{16} x^4y^4$
$- \frac{5}{8} x^5y^3$	$+ 4 x^6y^2$	$- 4 x^7y$	$- \frac{3}{16} x^4y^4$

EJERCICIO 16 Realice las siguientes multiplicaciones.

- 1) $3a \cdot (5b^2 + c)$
- 2) $2b^2 (3b + 2c - 4)$
- 3) $(12c^2 + 10b) \cdot 14cb$
- 4) $5bc (13 + 2bc - 3a)$
- 5) $(17xy + 15x - 14z) 2xz$

6. $\frac{3}{4} x \left(12x - 12xy - \frac{3}{2} z \right)$



$$7. \frac{3}{2}hz (z^2 - x + 7bh)$$

$$8. x^{\frac{1}{2}} (9xy - 14x^2 + 50x^3)$$

$$9. 15x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{3}} (4x^2y - 15y^{\frac{2}{3}} - 15y^2)$$

$$10. \left(\frac{17}{3}x^{\frac{1}{2}} + \frac{2}{8}h^{\frac{1}{3}} \right) \left(\frac{3}{4}\sqrt{x} - 5xh \right)$$

$$11. 2a^mb \cdot -3a^3b^n$$

$$12. -\frac{5}{4}a^mb^n \cdot -\frac{16}{10}a^{3m}b^{4n}$$

$$13. -\frac{8}{3}a^{2+m}b^{3+n} \cdot \frac{6}{16}a^{3m+1}b^{4n-1}$$

$$14. \frac{3}{4}x^{2m+1}y^5 \cdot \frac{8}{27}x^4b^{3n-3}$$

$$15. -\frac{8}{3}a^4b^2 (6a^{2+m}b + \frac{6}{16}a^{3m+1}b^{2n} - 9ab^{4n-1})$$

$$16. 5x^{2m}y^{2n} (2x^{4+m}y^n - 4x^{5m-1}y^{4n-3} - 7xy^{5-2n})$$

$$17. -3x^3 (11x^{4+m} - 5x^{4m-3} - \frac{4}{13}x^{4-2n}y)$$



UNIDAD XIII

3.16.4) DIVISIÓN DE POLINOMIOS

Para dividir dos polinomios, se sigue el procedimiento siguiente:

Se ordenan tanto el dividendo como el divisor, en forma decreciente con relación a las potencias de una letra común a ambos.

Se divide el primer término del dividendo entre el primer término del divisor, para obtener el primer término del cociente. Se ordenan el dividendo y el divisor con relación a una misma literal.

Se multiplica el término del cociente por cada uno de los términos del divisor, se colocan los productos debajo de sus términos semejantes en el dividendo, pero con signo cambiado, puesto que se restan.

El residuo obtenido pasa a ser el nuevo dividendo y se repiten los pasos 2 y 3.

El proceso se repite hasta que el residuo sea cero o hasta que en relación con la letra escogida, el grado del dividendo sea menor que el del divisor.

El cociente puede comprobarse, mediante la relación:

$$\text{Dividendo} = (\text{divisor}) (\text{cociente}) + \text{residuo}$$

Ejemplos:

1) Dividir los monomios $-15x^4y^5$ entre $-3xy^2$

Solución: Dividiendo los coeficientes, usando la ley de los signos y las propiedades de la división, es decir, que al dividir una misma base los exponentes se restan, queda:

$$\frac{-15x^4y^5}{-3xy^2} = \frac{-15}{-3} x^{4-1} y^{5-2} = 5x^3y^3$$

2) Dividir el polinomio $-3x^6y^3 - 24x^2y^4 + 9x^5y^2$ entre el monomio $6x^2y$

Solución: Cada uno de los términos del numerador se divide entre el denominador.

$$\begin{aligned} \frac{-3x^6y^3 - 24x^2y^4 + 9x^5y^2}{6x^2y} &= \frac{-3}{6} x^{6-2} y^{3-1} + \frac{-24}{6} x^{2-2} y^{4-1} + \frac{9}{6} x^{5-2} y^{2-1} \\ &= -\frac{1}{2} x^4 y^2 - 4x^0 y^3 + \frac{3}{2} x^3 y^1 \\ &= -\frac{1}{2} x^4 y^2 - 4y^3 + \frac{3}{2} x^3 y \end{aligned}$$

$x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4$ entre $x^2 + xy + y^2$

$$\begin{array}{r}
 x^2 \quad + xy \quad + y^2 \quad \overline{) \quad \begin{array}{l} x^4 \quad + x^3y \quad + 2x^2y^2 \quad + xy^3 \quad + y^4 \\ - x^4 \quad - x^3y \quad - x^2y^2 \\ \hline 0 \quad 0 \quad + x^2y^2 \quad + xy^3 \quad + y^4 \\ - x^2y^2 \quad - xy^3 \quad - y^4 \\ \hline 0 \quad 0 \quad 0 \end{array} }
 \end{array}$$

En virtud de que el residuo es 0, la división es exacta y el proceso termina. El resultado es: $x^2 + y^2$.

Esto también puede expresarse como:

$$\frac{x^4 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + y^4}{x^2 + xy + y^2} = x^2 + y^2$$

EJERCICIO 17

Dividir:

- 1) $a^2 + 2a - 3$ entre $a + 3$
- 2) $a^2 - 2a - 3$ entre $a + 1$
- 3) $m^2 - 11m + 30$ entre $m - 6$
- 4) $6 + a^2 + 5a$ entre $a + 2$
- 5) $-15x^2 - 8y^2 + 22xy$ entre $2y - 3x$
- 6) $14x^2 - 12 + 22x$ entre $7x - 3$
- 7) $-14y^2 + 33 + 71y$ entre $-3 - 7y$
- 8) $a^4 + a$ entre $a + 1$
- 9) $2x^4 - x^3 - 3 + 7x$ entre $2x + 3$
- 10) $am^4 - am - 2a$ entre $am + a$

UNIDAD XIV

3.17) PRODUCTOS NOTABLES

Los productos notables son aquellos productos que cumplen con reglas fijas, y cuyo resultado puede ser escrito por simple inspección.

A continuación expondremos los casos más comunes.

Un binomio se forma por dos términos $(a + b)$ o $(a - b)$, donde **a** es el primer término y **b** el segundo término. Todo lo que quede antes del signo $+$ o $-$ es **a** o el primer término y todo lo que queda después del $+$ o $-$ será el segundo término.

CUADRADO DE UN BINOMIO

1) Cuadrado de la suma de dos cantidades:

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b)$$

Realizando la multiplicación, queda:

$$(a + b)^2 = a(a) + a(b) + b(a) + b(b)$$

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ba + b^2$$

Finalmente:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Regla: El cuadrado de la suma de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera más el doble de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Así aplicando la regla anterior tenemos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (4x + 5y)^2 &= (4x)^2 + 2(4x)(5y) + (5y)^2 \\ (4x + 5y)^2 &= 16x^2 + 40xy + 25y^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad (2x + 3y)^2 &= (2x)^2 + 2(2x)(3y) + (3y)^2 \\ (2x + 3y)^2 &= 4x^2 + 12xy + 9y^2 \end{aligned}$$

2) Cuadrado de la diferencia de dos cantidades:

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b)$$

Realizando la multiplicación, queda:

$$\begin{aligned}(a - b)^2 &= a(a) + a(-b) - b(a) - b(-b) \\ (a - b)^2 &= a^2 - ab - ba + b^2\end{aligned}$$

Finalmente:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Regla: El cuadrado de la diferencia de dos cantidades es igual al cuadrado de la primera, menos el doble de la primera por la segunda, más el cuadrado de la segunda cantidad.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\text{a)} \quad (4x - 5y)^2 &= (4x)^2 - 2(4x)(5y) + (5y)^2 \\ (4x - 5y)^2 &= 16x^2 - 40xy + 25y^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{b)} \quad (2x - 3y)^2 &= (2x)^2 - 2(2x)(3y) + (3y)^2 \\ (2x - 3y)^2 &= 4x^2 - 12xy + 9y^2\end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad (a^2 - b)^2 = a^4 - 2a^2b + b^2$$

EJERCICIO 18 Desarrolla los binomios al cuadrado siguientes:

$$1. \quad (2a + c)^2$$

$$11. \quad (7xy^5 - 4a^4z)^2$$

$$2. \quad (5c + 3d)^2$$

$$12. \quad (x^{a-2} - 3b^x)^2$$

$$3. \quad (2a^2 + b^3)^2$$

$$13. \quad (xy^5 - 4c^{-2})^2$$

$$4. \quad (10b + 32^4)^2$$

$$14. \quad (7b^{-2} - 3x^5)^2$$

$$5. \quad (15c + d)^2$$

$$15. \quad (a^x - b^a)^2$$

$$6. \quad (6a - 2b)^2$$

$$16. \quad (a^n + b^a)^2$$

$$7. \quad (a^5 - d^2)^2$$

$$17. \quad (18a^{-2} + b^5)^2$$

$$8. \quad (x - y^2)^2$$

$$18. \quad (9b^3 + 15c^{-2})^2$$

$$9. \quad (7cd - x)^2$$

$$19. \quad (17x^3yz^2 + 8an^a)^2$$

$$10. \quad (xa - 2bx^5)^2$$

$$20. \quad \left(7b^4 + \frac{3}{4}a^{-5}\right)^2$$

CUBO DE UN BINOMIO

Cubo de la suma de dos cantidades:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$$

Realizando el producto:

$$(a + b)^3 = (a + b)^2 (a + b)$$

$$(a + b)^3 = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Regla: El cubo de un binomio es igual al cubo del primero, más el triple del primero al cuadrado por el segundo, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, más el cubo de la segunda.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (4x + 2y)^3 &= (4x)^3 + 3(4x)^2(2y) + 3(4x)(2y)^2 + (2y)^3 \\ (4x + 2y)^3 &= 64x^3 + 96x^2y + 48xy^2 + 8y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)^3 &= \left(\frac{1}{2}x\right)^3 + 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2\left(\frac{3}{4}y\right) + 3\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{4}y\right)^2 + \left(\frac{3}{4}y\right)^3 \\ \left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y\right)^3 &= \frac{1}{8}x^3 + \frac{9}{16}x^2y + \frac{27}{32}xy^2 + \frac{27}{64}y^3 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad (a^2 + b)^3 = a^6 + 3a^4b + 3a^2b^2 + b^3$$

Cubo de la diferencia de dos cantidades:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b)$$

Realizando el producto:

$$(a - b)^3 = (a - b)^2 (a - b)$$

$$(a - b)^3 = (a^2 - 2ab + b^2)(a - b)$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Regla: El cubo de un binomio es igual al cubo del primero, menos el triple del primero al cuadrado por el segundo, más el triple de la primera por el cuadrado de la segunda, menos el cubo de la segunda.

Ejemplos:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad (4x - 2y)^3 &= (4x)^3 - 3(4x)^2(2y) + 3(4x)(2y)^2 - (2y)^3 \\ (4x - 2y)^3 &= 64x^3 - 96x^2y + 48xy^2 - 8y^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)^3 = \left(\frac{1}{2}x\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}x\right)^2\left(\frac{3}{4}y\right) + 3\left(\frac{1}{2}x\right)\left(\frac{3}{4}y\right)^2 - \left(\frac{3}{4}y\right)^3 \\ & \left(\frac{1}{2}x - \frac{3}{4}y\right)^3 = \frac{1}{8}x^3 - \frac{9}{16}x^2y + \frac{27}{32}xy^2 - \frac{27}{64}y^3 \end{aligned}$$

$$\text{c)} \quad (a^2 - b)^3 = a^6 - 3a^4b + 3a^2b^2 - b^3$$

Obsérvese que cuando el binomio elevado al cubo es una diferencia, los signos se alternan, siendo el primero positivo siempre.

Otros productos de gran utilidad son los siguientes:

$$a(c + d) = ac + ad$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$$

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

EJERCICIO 19 Desarrolla los binomios al cubo siguientes:

$$1. \quad (2a + c)^3$$

$$2. \quad (5c + 3d)^3$$

$$3. \quad (2a^2 + b^3)^3$$

$$4. \quad (10b + 32d)^3$$

$$5. \quad (15c + d)^3$$

$$6. \quad (6a - 2b)^3$$

$$7. \quad (a^5 - d^2)^3$$

$$8. \quad (x - y^2)^3$$

$$9. \quad (7cd - x)^3$$

$$11. \quad (7xy^5 - 4a^4z)^3$$

$$12. \quad (x^{a-2} - 3b^x)^3$$

$$13. \quad (xy^5 - 4c^2)^3$$

$$14. \quad (7b^{-2} - 3x^5)^3$$

$$15. \quad (a^x - b^a)^3$$

$$16. \quad (a^n + b^a)^3$$

$$17. \quad (18a^{-2} + b^5)^3$$

$$18. \quad (9b^3 + 15c^{-2})^3$$

$$19. \quad (17x^3yz^2 + 8an^a)^3$$

$$10. \quad (xa - 2bx^5)^3$$

$$20. \quad \left(7b^4 + \frac{3}{4}a^{-5}\right)^3$$

EJERCICIO 20 Escribir por simple inspección, el resultado de:

$$1. \quad (a + 1)(a - 1)$$

$$2. \quad (n - 2)(n + 2)$$

$$3. \quad (3n + 2)(3n - 2)$$

$$4. \quad (7b - c)(7b + c)$$

$$5. \quad (9xy + 4c)(9xy - 4c)$$

$$6. \quad (6b + c)(-c + 6b)$$

$$7. \quad (m + n)(m - n)$$

$$8. \quad (xy + z)(xy - z)$$

$$9. \quad (e - n)(e + n)$$

$$10. \quad (n + m^2)(n - m^2)$$

$$11. \quad (3a^2 - b^3)(3a^2 + b^3)$$

$$12. \quad (7b^5 + c^2)(7b^5 - c^2)$$

$$13. \quad (z^n - b^x)(z^n + b^x)$$

$$14. \quad (3n^2 - b)(3n^2 + b)$$

$$15. \quad (3c^n + b^2)(3c^n - b^2)$$

UNIDAD XV

3.19) COCIENTES NOTABLES

Se les llama así a ciertos cocientes que cumplen reglas fijas bien definidas y que pueden ser escritos por simple inspección.

$$\text{Caso I)} \quad \frac{a^2 - b^2}{a + b} = a - b \quad (\text{CN } 1)$$

Se lee como: la diferencia de cuadrados de dos números entre su suma es igual a su diferencia.

Ejemplos: Por simple inspección hallar

$$1) \quad \frac{4x^2 - 9m^2 n^4}{2x + 3mn^2}$$

Comparando con la expresión (CN 1), se ve que $a^2 = 4x^2$, sacando raíz a ambos miembros, se tiene que $a = 2x$. También, $b^2 = 9m^2 n^4$ y si sacamos raíz a ambos lados del igual, se obtiene $b = 3mn^2$. Por lo tanto se cumple con el caso I y el resultado es igual al denominador pero en forma de diferencia.

Esto es:

$$\frac{4x^2 - 9m^2 n^4}{2x + 3mn^2} = 2x - 3mn^2$$

$$2) \quad \frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) + z}$$

Comparando con la expresión (CN 1), se ve que $a^2 = (x + y)^2$, sacando raíz a ambos miembros, se tiene que $a = (x + y)$. También, $b^2 = z^2$ y si sacamos raíz a ambos lados del igual, se obtiene $b = z$. Por lo tanto se cumple con el caso I y el resultado es igual al denominador pero en forma de diferencia.

Esto es:

$$\frac{(x + y)^2 - z^2}{(x + y) + z} = x + y - z$$

Caso II) $\frac{a^2 - b^2}{a - b} = a + b$ (CN 2)

Se lee como: la diferencia de cuadrados de dos números entre su diferencia es igual a su suma.

Ejemplos: Por simple inspección hallar

1) $\frac{9x^2 - 4y^2}{3x - 2y}$

Comparando con la expresión (CN 2), se ve que $a^2 = 9x^2$, sacando raíz a ambos miembros, se tiene que $a = 3x$. También, $b^2 = 4y^2$, y si sacamos raíz a ambos lados del igual, se obtiene $b = 2y$. Por lo tanto se cumple con el caso II y el resultado es igual al denominador pero en forma de suma.

Esto es:

$$\frac{9x^2 - 4y^2}{3x - 2y} = 3x + 2y$$

2) $\frac{1 - (a + n)^2}{1 - (a + n)}$

Comparando con la expresión (CN 2), se ve que $a^2 = 1$, sacando raíz a ambos miembros, se tiene que $a = 1$. También, $b^2 = (a + n)^2$ y si sacamos raíz a ambos lados del igual, se obtiene $b = (a + n)$. Por lo tanto se cumple con el caso II y el resultado es igual al denominador pero en forma de diferencia.

Esto es:

$$\frac{1 - (a + n)^2}{1 - (a + n)} = 1 + a + n$$

Caso III) $\frac{a^3 + b^3}{a + b} = a^2 - ab + b^2$ (CN 3)

Se lee como: la suma de cubos de dos números entre su suma es igual al cuadrado del primero, menos el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplos: Por simple inspección hallar

$$1) \quad \frac{27x^3 + 64y^3}{3x + 4y}$$

Comparando con la expresión (CN 3), se ve que $a^3 = 27x^3$, sacando raíz cúbica a ambos miembros, se tiene que $a = 3x$. También, $b^3 = 64y^3$, y si sacamos raíz cúbica a ambos lados del igual, se obtiene $b = 4y$. Por lo tanto se cumple con el caso III y el resultado es igual al cuadrado del primero ($a^2 = (3x)^2 = 9x^2$); menos el producto del primero por el segundo ($-ab = -(3x)(4y) = -12xy$); más el cuadrado del segundo ($b^2 = (4y)^2 = 16y^2$).

Esto es:

$$\frac{27x^3 + 64y^3}{3x + 4y} = 9x^2 - 12xy + 16y^2$$

$$2) \quad \frac{125x^3 + (a+n)^3}{5x + (a+n)}$$

Comparando con la expresión (CN 3), se ve que $a^3 = 125x^3$, sacando raíz cúbica a ambos miembros, se tiene que $a = 5x$. También, $b^3 = (a+n)^3$, y si sacamos raíz cúbica a ambos lados del igual, se obtiene $b = (a+n)$. Por lo tanto se cumple con el caso III y el resultado es igual al cuadrado del primero ($a^2 = (5x)^2 = 25x^2$); menos el producto del primero por el segundo ($-ab = -(5x)(a+n)$); más el cuadrado del segundo ($b^2 = (a+n)^2$).

$$\text{Esto es: } \frac{125x^3 + (a+n)^3}{5x + (a+n)} = 25x^2 - 5x(a+n) + (a+n)^2$$

$$\text{Caso IV) } \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 + ab + b^2 \quad (\text{CN 4})$$

Se lee como: la diferencia de cubos de dos números entre su diferencia es igual al cuadrado del primero, más el producto del primero por el segundo más el cuadrado del segundo.

Ejemplos: Por simple inspección hallar

$$1) \quad \frac{8a^3x^3 - 216a^6y^3}{2ax - 6a^2y}$$

Comparando con la expresión (CN 4), se ve que $a^3 = 8a^3x^3$, sacando raíz cúbica a ambos miembros, se tiene que $a = 2ax$. También, $b^3 = 216a^6y^3$, y si sacamos raíz cúbica a ambos lados del igual, se obtiene $b = 6a^2y$. Por lo tanto se cumple con el caso IV y el resultado es igual al cuadrado del primero ($a^2 = (2ax)^2 = 4a^2x^2$); más el producto del primero por el segundo ($ab = (2ax)(6a^2y) = 12a^3xy$); más el cuadrado del segundo ($b^2 = (6a^2y)^2 = 36a^4y^2$).

Esto es:

$$\frac{8a^3x^3 - 216a^6y^3}{2ax - 6a^2y} = 4a^2x^2 - 12a^3xy + 36a^4y^2$$

$$2) \quad \frac{729x^3 - (x+y)^3}{9x - (x+y)}$$

Comparando con la expresión (CN 4), se ve que $a^3 = 729x^3$, sacando raíz cúbica a ambos miembros, se tiene que $a = 9x$. También, $b^3 = (x+y)^3$, y si sacamos raíz cúbica a ambos lados del igual, se obtiene $b = (x+y)$. Por lo tanto se cumple con el caso IV y el resultado es igual al cuadrado del primero ($a^2 = (9x)^2 = 81x^2$); más el producto del primero por el segundo ($ab = (9x)(x+y)$); más el cuadrado del segundo ($b^2 = (x+y)^2$).

$$\text{Esto es:} \quad \frac{729x^3 - (x+y)^3}{9x - (x+y)} = 81x^2 + 9x(x+y) + (x+y)^2$$

EJERCICIO 21 Escribir por simple inspección, el resultado de:

$$1) \quad \frac{16x^2 - 81m^2 n^4}{4x + 9mn^2}$$

$$2) \quad \frac{(2x + 3y)^2 - z^4}{(2x + 3y) + z^2}$$

$$3) \quad \frac{81x^2 - 16y^2}{9x - 4y}$$

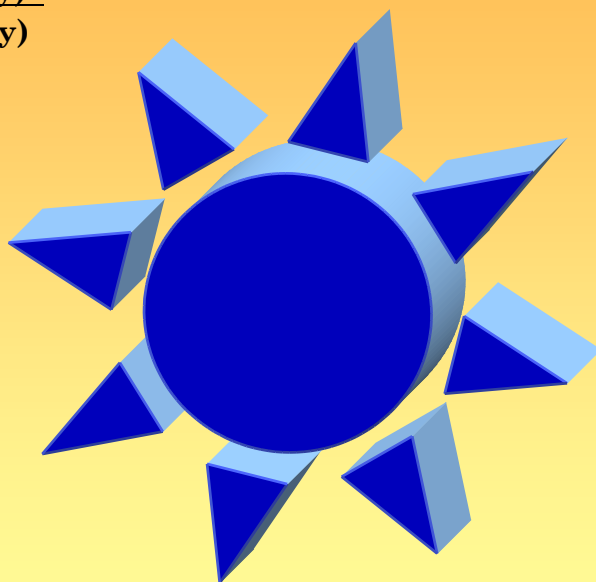
$$4) \quad \frac{49 - (3a + 4n)^4}{7 - (3a + 4n)^2}$$

$$5) \quad \frac{1000x^3 + 512y^3}{10x + 8y}$$

$$6) \quad \frac{x^3 + (5a + 6n)^6}{x + (5a + 6n)^3}$$

$$7) \quad \frac{125a^3 x^3 - 64a^6 y^3}{5ax - 4a^2 y}$$

$$8) \quad \frac{216x^3 - (4x + 3y)^3}{6x - (4x + 3y)}$$



UNIDAD XVI

3.18) TEOREMA DEL BINOMIO DE NEWTON

Es muy útil este teorema para desarrollar un binomio a un exponente cualquiera, es decir, para obtener el resultado de un binomio de la forma $(a + x)^n$, sin realizar tantas operaciones sino únicamente aplicando sus propiedades.

FACTORIAL de un número n : es el producto consecutivo de los primeros n números enteros.

Se representa por $n!$

Ejemplos:

$$1! = 1$$

$$2! = 1 \times 2 = 2$$

$$3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

$$4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$$

$$5! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$$

$$6! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$$

..... etc.

Es decir, $n! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times n$

Por definición, $0! = 1$

Si desarrollamos sucesivamente los binomios a un exponente n , incrementado cada vez en una unidad, se obtiene lo siguiente:

$$(a + x)^0 = 1$$

$$(a + x)^1 = 1a + 1x$$

$$(a + x)^2 = 1a^2 + 2ax + 1x^2$$

$$(a + x)^3 = 1a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + 1x^3$$

$$(a + x)^4 = 1a^4 + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + 1x^4$$

$$(a + x)^5 = 1a^5 + 5a^4x + 10a^3x^2 + 10a^2x^3 + 5ax^4 + 1x^5$$

$$(a + x)^6 = 1a^6 + 6a^5x + 15a^4x^2 + 20a^3x^3 + 15a^2x^4 + 6ax^5 + 1x^6$$

etc.

De lo anterior, se observa que existe cierta regularidad en el desarrollo de los binomios al ir incrementando en 1 su exponente n . Teniendo las propiedades siguientes:

i) El número de términos es igual a su exponente incrementado en 1, esto es: $n + 1$.

El coeficiente del primero y último término es 1 y su exponente es n .

El grado de cada término es n , mientras que **a** disminuye su exponente en 1, el de **x** aumenta en 1 en cada término consecutivo.

El coeficiente del término siguiente se obtiene multiplicando el coeficiente por el exponente de **a** del término anterior, dividido por el exponente que le corresponda a **x** en ese término.

Hay dos términos medios cuando el exponente n es entero, impar y positivo.

Hay un término medio cuando el exponente n es entero, par y positivo.

Los coeficientes de los términos que equidistan de los extremos son iguales.

El grado de todos los términos es **n**.

Al polinomio en el que todos sus términos son del mismo grado se le llama: **polinomio homogéneo**. El desarrollo de los binomios elevados a la potencia n , siempre produce polinomios homogéneos.

Dichos coeficientes se pueden distribuir de la forma siguiente:

	Potencia del binomio
1	0
1 1	1
1 2 1	2
1 3 3 1	3
1 4 6 4 1	4
1 5 10 10 5 1	5
1 6 15 20 15 6 1	6
1 7 21 35 35 21 7 1	7

Este arreglo de números se le denomina *Triángulo de Pascal* y nos sirve de gran ayuda para elevar a cualquier potencia un binomio, ya que nos indica los coeficientes que le corresponden a cada término.

Para formarlo se utiliza la regla siguiente:

Regla: Se empieza colocando el triángulo de unos que aparece en color rojo, un 1 encima de otros dos, después se suman los dos números de arriba (20 y 15) y el resultado se coloca abajo y en medio de los dos números sumados (35), agregando un uno a cada extremo del renglón (este último paso siempre se repite); repitiéndose el procedimiento anterior hasta llegar a la potencia que se desee, la cual queda definida por el segundo número del renglón (7).

Es importante recordar que el triángulo de Pascal solo nos indica los coeficientes de cada uno de los términos del resultado; para encontrar los exponentes de las literales, siempre se cumple que la primera literal siempre

tendrá como exponente **n**, es decir, la potencia del binomio. Para los términos siguientes la primera literal disminuirá su exponente en una unidad cada vez, mientras que la segunda literal aumentará su exponente una unidad.

Ejemplo:

$$(a + b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

En el caso que el binomio sea una diferencia, se procede de la misma manera, únicamente debemos alternar los signos + y - de cada término, debiendo iniciar con el signo positivo.

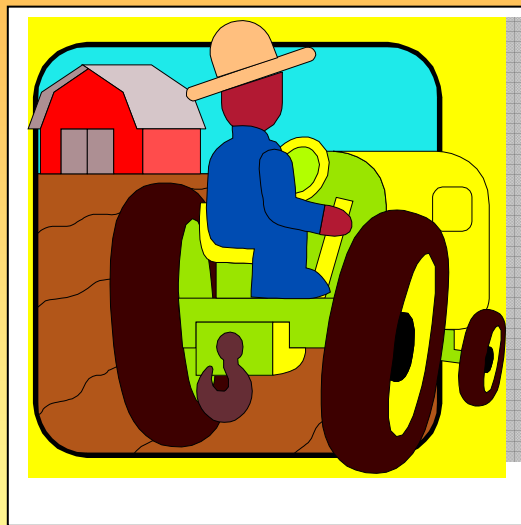
Ejemplos:

$$(a - b)^6 = a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6$$

$$(a - x)^3 = a^3 - 3a^2x + 3ax^2 - x^3$$

EJERCICIO 22 Elevar los siguientes binomios a las potencias que se indican, utilizando el Teorema del Binomio de Newton.

- | | |
|----------------|-------------------------|
| 1. $(a + b)^3$ | 6. $(2a - b)^6$ |
| 2. $(a - b)^3$ | 7. $(3bx + 5c)^7$ |
| 3. $(a + b)^4$ | 8. $(7b^2 + 9d)^5$ |
| 4. $(a + b)^5$ | 9. $(3b + 7xy)^4$ |
| 5. $(x - y)^8$ | 10. $(2xy + 3b^2)^{10}$ |



UNIDAD XVII

3.20) FACTORIZACION

Se llaman **factores** o *divisores* de una expresión algebraica, a las expresiones algebraicas, que multiplicadas entre sí dan como producto la primera expresión.

Así en: $(3x + 2y)(4 + 2x) = 12x + 6x^2 + 8y + 4xy$

$3x + 2y$ y $4 + 2x$ son factores de $12x + 6x^2 + 8y + 4xy$

Descomponer en factores o factorizar una expresión algebraica es convertirla en el producto *indicado* de sus factores.

La factorización de un polinomio se presenta cuando todos los términos tienen un factor común. Se busca el factor común o que se repite en todos los términos y este se deja fuera del paréntesis, dentro del paréntesis se coloca lo que multiplicado con el factor común nos daría el término original.

FACTOR MONOMIO COMÚN

Ejemplo: Factorizar $a^2 + 2a$

Se obtiene el factor común de los términos con su menor exponente; que en este caso es ***a*** y se coloca como coeficiente de un paréntesis, dentro del cual escribimos el cociente de dividir a cada término entre el factor común, o bien, lo que multiplicado nos daría los términos de la expresión original.

$$a^2 + 2a = a(a + 2)$$

Ejemplo: Factorizar $a^6 b^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5$

Se obtiene el factor común de los términos con su menor exponente; que en este caso es ***ab*** y se coloca como coeficiente de un paréntesis, dentro del cual escribimos el cociente de dividir a cada término entre el factor común, o bien, lo que multiplicado nos daría los términos de la expresión original.

$$ab(a^5 b^5 - 6a^4 + 15a^3 b - 20a^2 b^2 + 15ab^3 - 6b^4)$$

FACTOR COMÚN POLINOMIO.

Descomponer $x(a + b) + m(a + b)$

El procedimiento es idéntico al anterior, solo que en este caso el factor común es un polinomio.

Así tenemos que el factor común que se repite es $(a + b)$:

$$x(a + b) + m(a + b) = (a + b)(x + m)$$

EJERCICIO 23 Descomponer las siguientes expresiones algebraicas:

- | | |
|------------------------------|---|
| 1. $a^3 + ba$ | 9. $(a + b)cx + (a + b)d$ |
| 2. $3a + 3ab$ | 10. $(a + c)(x + y) + (z + a)(x + y)$ |
| 3. $2x + 3x + x$ | 11. $(x + 2)x + (2 + x)3y + 5c(x + 2)$ |
| 4. $6ab + 3bc + 9b$ | 12. $(a - c)3x + (3x - 4)3x - (3x - 4)3x$ |
| 5. $7c + 2abc$ | 13. $(3c + 2)(3x + y) + (3c - 2)(3x + y)$ |
| 6. $3x^2 + 3xy$ | 14. $(16c + 3)12bc + (16c + 3) + 5bc$ |
| 7. $9bc + 2ab + 3bd$ | 15. $7xy(3b^2 + x) - 9by(3b^2 + x)$ |
| 8. $5c^2b^3 + 10cb^3 + b^3c$ | 16. $(12x - 21y)(2b + c) - (2b + c)(3d)$ |

FACTOR COMÚN POR AGRUPACIÓN DE TÉRMINOS.

Descomponer $ax + bx + ay + by$

A primera vista parece no haber un factor común pero podemos factorizarlo ordenando la expresión con respecto a una literal común, así, tendríamos:

Ordenando con respecto a la literal **a**, se tiene:

$$(ax + ay) + (bx + by)$$

A continuación se factorizan individualmente, cada uno de los binomios, es decir, se extrae el factor común.

$$a(x + y) + b(x + y)$$

Obsérvese que ahora hay un polinomio común por lo que es posible volver a factorizar, obteniendo así el resultado definitivo hasta que este ya no sea factorizable.

$$(x + y)(a + b)$$

EJERCICIO 24 Descomponer los siguientes polinomios:

- $am + nm + m^2 + na$
- $3x + 6xyz + y^2 + zx + xy + 9zy$
- $xy + by + xa + ba$
- $abc + 9ba + 12dc + 3da$

5. $6bc + 9ba + 12dc + 3da$
6. $5xbd + 10bxc + 25acd + 50ac^2$
7. $k + km + k^2 + m$
8. $az + bz + ax + bx$
9. $eih + vih + eaz + vaz$
10. $a^2b^3 - n^4 + a^2b^3x^2 - n^4x^2 - 3a^2b^3x + 3n^4x$

UNIDAD XVIII

3.20.1) TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Un trinomio es un cuadrado perfecto, cuando es el cuadrado de un binomio.

Ejemplo:

$a^2 + 2ab + b^2$ es un trinomio cuadrado perfecto ya que es el cuadrado de $a + b$, esto es: $(a + b)^2$.

REGLA PARA CONOCER SI UN TRINOMIO ES CUADRADO PERFECTO.

El primer y tercer términos deben tener raíz cuadrada exacta y el segundo término debe ser el doble del producto de estas raíces.

Así $e^2 + 2ei + i^2$ es un trinomio cuadrado perfecto

Porque:

Raíz cuadrada de e^2 ——— e

Raíz cuadrada de i^2 ——— i

Y $2ei$ es el doble producto de e x i

REGLA PARA FACTORIZAR UN TRINOMIO CUADRADO PERFECTO.

Se extrae la raíz cuadrada del primer y tercer términos y se separan por el signo del segundo término, quedando así un binomio el cual se eleva al cuadrado.

Ejemplo: factorizar $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)^2$

EJERCICIO 25 Factorizar:

- 1) $h^2 - 22hi + i^2$
- 2) $9x^2 - 18xz + 9z^2$
- 3) $25y^4 - 30y^2z + 9z^2$
- 4) $9a^4 - 12a^2b^3 + 4b^6$
- 5) $4a^2b^2 + 4abc^2 + c^4$

- 6) $25a^2 - 10abc^2 + b^2c^4$
- 7) $9h^6 + 6h^3i + i^2$
- 8) $9b^4 + 30b^2c + 25c^2$
- 9) $81x^2y^2 - 54xyz + 9z^2$
- 10) $h^2i^4 + 8hi^2x^2z^3 + 16x^4z^6$
- 11) $81b^2c^2h^2 - 72bchxy + 16x^2y^2$

$$12. 9b^2 - 4bh + \frac{4}{9}h^2$$

$$13. 4c^2 + 2cx^2 + \frac{1}{4}x^4$$

$$14. \frac{1}{16}x^2 - \frac{6}{16}xch + \frac{9}{16}c^2h^2$$

$$15. 9x^2h^2 + 12xhab + 4a^2b^2$$

3.20.2) DIFERENCIA DE CUADRADOS PERFECTOS

Su forma general es: $a^2 - b^2$

Regla:

Se extrae la raíz cuadrada del minuendo y del sustraendo y se multiplica la suma de estas raíces cuadradas por la diferencia entre la raíz del minuendo y la del sustraendo.

Ejemplo: factorar $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

$$a^{2n} - 9b^{4m} = (a^n + 3b^{2m})(a^n - 3b^{2m})$$

EJERCICIO 26 factorizar:

- | | |
|----------------------------|------------------------------------|
| 1. $a^4 - 4b^2$ | 9. $(3b^2 + c)^2 - 4x^2b^6$ |
| 2. $9c^4 - b^6$ | 10. $(3b + z^3)^2 - (5b^2 - 3c)^2$ |
| 3. $25b^8 - 81c^4$ | 11. $(25b^8 - 25c^6$ |
| 4. $49b^{2n} - 16c^4$ | 12. $64c^4 - 16d^2c^4$ |
| 5. $4b^{6n} - 25b^2c^6$ | 14. $b^2 - 49x^2y^6$ |
| 6. $(a + b)^2 - b^4$ | 15. $4c^6 - 100x^2y^4$ |
| 7. $4x^2y^6 - (a + c)^2$ | |
| 8. $(c - x)^2 - (x + y)^2$ | |

TRINOMIO DE LA FORMA $x^2 + bx + c$

Ejemplos de estos trinomios son:

$$\begin{aligned} a^2 + 3a + 2 \\ y^2 - 8y + 15 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m^2 + 5m - 14 \\ a^2 - 2a - 15 \end{aligned}$$

que cumplen con las condiciones siguientes:

El coeficiente del primer término es 1.

El primer término es una letra cualquiera elevada al cuadrado.

El segundo término tiene la misma letra que el primero con exponente 1, y su coeficiente es cualquier número positivo o negativo.

El tercer término es independiente de la letra que aparece en el primer y segundo términos y es una cantidad cualquiera positiva o negativa.

Regla para factorizar un trinomio de la forma $x^2 + bx + c$

El trinomio se descompone en dos binomios, cuyo primer término de ambos es la raíz cuadrada del primer término del trinomio, después se buscan dos números que al sumarse nos den el segundo término del trinomio y los mismos al multiplicarse nos den el tercer término del trinomio.

Ejemplo:

$$\text{Factorizar} \quad x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1)$$

Obsérvese que $x \cdot x = x^2$ que es el primer término del trinomio, $2 + 1 = 3$ que es el segundo y que $2 \cdot 1 = 2$ que es el tercer término del trinomio.

$$\text{Factorizar:} \quad x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$$

* Este tipo de trinomios también se pueden resolver encontrando sus raíces utilizando la fórmula general para ecuaciones de segundo grado, así las raíces que se encuentren serán los segundos términos de cada binomio, pero con signo contrario al que poseen.

Ejemplo: Encontraremos las raíces del trinomio anterior utilizando la **fórmula general** para ecuaciones de segundo grado:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ÁLGEBRA

El trinomio se ordena con respecto a la letra que está elevada al cuadrado, teniendo como referencia que ésta siempre será “x”.

Así: $x^2 - 7x + 12$ * Sólo los coeficientes toman el signo.

Sustituimos en la fórmula general para ecuaciones de segundo grado.

Así tenemos que:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4(1)(12)}}{2(1)}$$
$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$$
$$x_1 = \frac{7+1}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad x_2 = \frac{7-1}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Así las raíces buscadas son 4 y 3 y por lo tanto la respuesta, se escribe como:

$(x - 4)(x - 3)$. Note que las raíces quedan con su signo cambiado.

Otra forma de resolver la ecuación $x^2 - 7x + 12$, es buscar dos números que multiplicados den el termino independiente c (12) y que sumados den el coeficiente b de x (-7). Estos números son: -4 y -3.

Multiplicados: $(-4)(-3) = +12$ y sumados: $-4 + -3 = -7$.

EJERCICIO 27

Factorizar:

- | | |
|---------------------|-----------------------|
| 1. $x^2 + 7x + 10$ | 11. $x^2 - 5x - 36$ |
| 2. $x^2 + 3x - 10$ | 12. $n^2 - 6n - 40$ |
| 3. $a^2 + 4a + 3$ | 13. $a^2 - 2a - 35$ |
| 4. $y^2 - 9y + 20$ | 14. $m^2 + 13m - 30$ |
| 5. $x^2 - 9x + 8$ | 15. $x^2 + 15x + 56$ |
| 6. $x^2 - 3x + 2$ | 16. $a^2 + 7a - 60$ |
| 7. $a^2 + 7a + 6$ | 17. $m^2 - 20m - 300$ |
| 8. $12 - 8n + n^2$ | 18. $c^2 + 24c + 135$ |
| 9. $a^2 + 7a - 18$ | 19. $m^2 - 30m - 675$ |
| 10. $x^2 - 7x + 30$ | 20. $m^2 - 8m - 1008$ |

UNIDAD XIX

3.22) LENGUAJE ALGEBRAICO

El lenguaje algebraico constituye el lenguaje de las matemáticas y por lo tanto de la ciencia en general, razón por la cual es importante saber interpretar las expresiones algebraicas en el lenguaje común y por supuesto, es necesario saber traducir del lenguaje común al lenguaje o notación algebraica, principalmente en las aplicaciones a la vida real.

Generalmente, las cantidades o números desconocidos (incógnitas) las representamos por variables, siendo las más utilizadas x , y , z .

EJEMPLOS DE FRASES DEL LENGUAJE COMÚN TRANSFORMADAS A LENGUAJE ALGEBRAICO

FRASE COMÚN	EXPRESIÓN ALGEBRAICA
Una cantidad desconocida	x
Dos veces un número (duplo)	$2x$
Tres veces un número (triple)	$3x$
Cuatro veces un número (cuádruplo)	$4x$
Un número menos 7	$x - 7$
12 menos un número	$12 - x$
Un número incrementado en 3	$x + 3$
Un número disminuido en 4	$x - 4$
La suma de dos números	$x + y$
La diferencia de dos números	$x - y$
La mitad de un número	$\frac{1}{2}x$ ó $x/2$
La tercera parte de un número	$x/3$
La cuarta parte de un número	$\frac{1}{4}x$ ó $x/4$
El doble de un número más el triple de otro	$2x + 3y$
La suma de tres números	$x + y + z$
El producto de tres números	xyz
El cuádruplo de un número menos el doble de otro	$4x - 2y$
Un número por el cuadrado de otro	xy^2
El triple de un número por el cubo de otro	$3x y^3$
La suma de dos números es igual a 18	$x + y = 18$
La suma de tres números es igual la raíz de otro	$x + y + z = \sqrt{w}$
El triple de un número menos el doble de otro es mayor que 10	$3x - 2y > 10$
La mitad de un número más el triple del mismo número	$\frac{1}{2}x + 3x$
El triple producto del cuadrado de un número cualquiera menos su doble	$3x^2 - 2x$

El producto de la suma de dos números por su diferencia es 144 $(x + y)(x - y) = 144$

El producto de dos números dividido por su suma es 64 $xy / (x + y) = 64$

La suma de 3 números consecutivos

$$X + x+1 + x+2$$

La suma de 3 números pares consecutivos (x par)

$$X + x+2 + x+4$$

El área de un trapecio es igual al producto de la semisuma de sus bases mayor y menor (B, b) por su altura (h)

$$A = h (B+ b)/2$$

El cuadrado de un binomio es igual al cuadrado del primero (x), mas el doble producto del primero por el segundo (y) y más el cuadrado del segundo.

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

El cuadrado de la hipotenusa (c) es igual a la suma del cuadrado de los catetos (a y b)

$$C^2 = a^2 + b^2$$

El área de un círculo es igual al producto del número pi (π) por su radio al cuadrado

$$A = \pi r^2$$

El producto de la presión (P) por el volumen (V) en un gas permanece constante (k)

$$PV = k$$

La fuerza (F) es directamente proporcional al producto de la masa por la aceleración (a).

$$F \propto ma \text{ ó } F = ma$$

La presión (P) es inversamente proporcional al volumen (V) en un gas

$$P \propto k / V \text{ ó } P = k / V$$

El símbolo $\propto$ significa "proporcional a".

EJERCICIO 28 Escribir la expresión algebraica de cada una de las frases comunes siguientes:

- 1) Las tres cuartas partes de un número.
- 2) La mitad de la suma de dos números.
- 3) La mitad de la diferencia de dos números.
- 4) El doble de un número más uno.
- 5) El quíntuplo de un número menos tres.
- 6) Dos números cuya suma es 120.
- 7) Dos números cuya diferencia sea 80
- 8) El área de un cuadrado es igual a la longitud de su lado al cuadrado.
- 9) El producto de la suma de dos números por su diferencia es 12
- 10) El cociente de dos números multiplicado por su suma es 128
- 11) La suma de 3 números impares consecutivos (x impar)
- 12) La suma de cuatro números cualesquiera.
- 13) El área de un cuadrado es igual a la longitud de su lado al cuadrado.
- 14) El cubo de un binomio es igual al cubo del primero (x), más el triple producto del primero al cuadrado por el segundo (y), más el triple producto de

primero por el segundo al cuadrado y más el cubo del segundo.

- 15) La hipotenusa (c) es igual a la raíz cuadrada de la suma del cuadrado de los catetos (a y b)
- 16) El volumen de un cilindro circular recto, es igual al producto del número pi (π) por su radio al cuadrado y por su altura (h).
- 17) El producto del área (A_1) por la velocidad (V_1) de un líquido a la entrada de un tubo, es igual al producto del área (A_2) por la velocidad (V_2) de un líquido a la salida de dicho tubo
- 18) La fracción cuyo numerador es igual a 4 veces el denominador menos trece unidades

Hay algunos trucos sencillos para adivinar números, los cuales siguen algunas operaciones consecutivas, que si se escriben utilizando el lenguaje algebraico, fácilmente hallaremos el truco que utiliza el adivino.

Por ejemplo:

<i>Frase</i>	<i>Expresión Algebraica</i>
<i>Piensa un número</i>	x
<i>Súmale 5</i>	$x + 5$
<i>Multiplícalo por 2</i>	$(x + 5)(2) = 2x + 10$
<i>Réstale 2</i>	$2x + 10 - 2 = 2x + 8$
<i>Dividelo entre 2</i>	$(2x + 8) / 2 = x + 4$

Ahora el adivino pide el resultado, y para adivinar el número solo le tiene que restar 4 y le quedará el número pensado originalmente.

Esto es: $x + 4 - 4 = x$ Queda el número pensado.

Por ejemplo, supongamos que alguien piensa el número 7, se obtiene:

<i>Frase</i>	<i>Expresión Algebraica</i>
<i>Piensa un número</i>	7
<i>Súmale 5</i>	$7 + 5 = 12$
<i>Multiplícalo por 2</i>	$12 \times 2 = 24$
<i>Réstale 2</i>	$24 - 2 = 22$
<i>Dividelo entre 2</i>	$22 / 2 = 11$

Cuando le decimos al adivino el resultado 11, entonces le resta 4 y obtiene 7; y por lo tanto nos dice que el número que pensamos fue el 7.

Es muy importante también, poder interpretar en el lenguaje común las expresiones algebraicas.

EJEMPLOS DE FRASES TRANSFORMADAS DEL LENGUAJE ALGEBRAICO AL LENGUAJE COMÚN

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

FRASE EN LENGUAJE COMÚN

$$C = c + crt$$

El capital final (C) es igual al capital inicial (c) más el producto del capital inicial (c) por el rédito (r) y por el tiempo (t) que duró el préstamo.

$$c = i / rt$$

El capital inicial (c) es igual al interés simple (i) dividido entre el producto del rédito (r) por el tiempo del préstamo (t).

$$r = (C - c) / ct$$

El rédito (r) es igual a la diferencia entre el capital final (C) y el capital inicial (c) dividida entre el producto del capital inicial (c) por el tiempo (t).

$$V = 4/3 \pi r^3$$

El volumen de una esfera (V) es igual al producto de 4/3 de π por su radio (r) al cubo.

$$E = I R$$

El voltaje aplicado (E) en un circuito eléctrico es igual al producto de la corriente resultante (I) por su resistencia (R).

$$I = E / (R + r)$$

La corriente resultante (I) en un circuito es igual al voltaje en la batería (E) dividido entre la suma de la resistencia del circuito (R) y la resistencia interna (r) de la batería.

$$W = VI / 746$$

La potencia de un motor eléctrico (W) en caballos de vapor es igual al producto del número de volts (V) por el número de amperes (I) y dividiendo entre 746.

$$P_o V_o = PV$$

La ley de Boyle expresa que el producto de la presión inicial (P_o) por el volumen inicial (V_o) es igual al producto de la presión final (P) por el volumen final (V)

$$L = L_o + a L_o (T - T_o)$$

La longitud final (L) de un sólido es igual a su longitud inicial (L_o) más el producto del coeficiente de dilatación lineal (a) por la longitud inicial y por la diferencia entre la temperatura final (T) y la temperatura inicial (T_o).

$$d = v_o t + \frac{1}{2} g t^2$$

La distancia recorrida (d) por un cuerpo en caída libre es igual al producto de su velocidad inicial (v_o) por el tiempo transcurrido (t), más la mitad del producto de la aceleración de la gravedad (g) por el tiempo transcurrido (t) al cuadrado.

$$A = \pi r^2$$

El área de un círculo (A) es igual al producto del número π por su radio (r) al cuadrado.

$$\text{Sen } A = a/c$$

El seno del ángulo A es igual al cociente entre el cateto opuesto (a) y la hipotenusa (c) de un triángulo rectángulo.

$$C = 5/9 (F - 32)$$

La temperatura en grados centígrados (C) es igual al producto de 5/9 por el número de grados Fahrenheit (F) disminuidos en 32.

EJERCICIO 29 Escribir las frases comunes de cada una de las expresiones algebraicas siguientes:

EXPRESIÓN ALGEBRAICA

SIGNIFICADO DE LAS VARIABLES

$$2x + 3y + 4z$$

$$5y - 3x$$

$$3x^3y^2z$$

$$a^4b^2 + a^3b^2 - a^2b^3$$

$$F = ma$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

$$S = (a + b + c) / 2$$

$$P = P_0 (1 + r)^n$$

$$W = F d$$

$$V = 331.5 + 0.607 t$$

$$F = K q_1 q_2 / r^2$$

$$H = \pi n T / 225\,000$$

x, y, z son tres números cualesquiera.

x, y son dos números cualesquiera.

x, y, z son tres números cualesquiera.

a, b son dos números cualesquiera.

F = fuerza, m = masa, a = aceleración.

a, b, c son tres lados de un triángulo y C es el ángulo opuesto a c y formado por a y b.

S = semiperímetro de un triángulo; a, b, c son los lados de un triángulo.

P = población futura, P_0 = población inicial,

r = razón de crecimiento y n = número de años.

W = trabajo realizado por una fuerza, F = fuerza, d = distancia a través de la cual se mueve la fuerza.

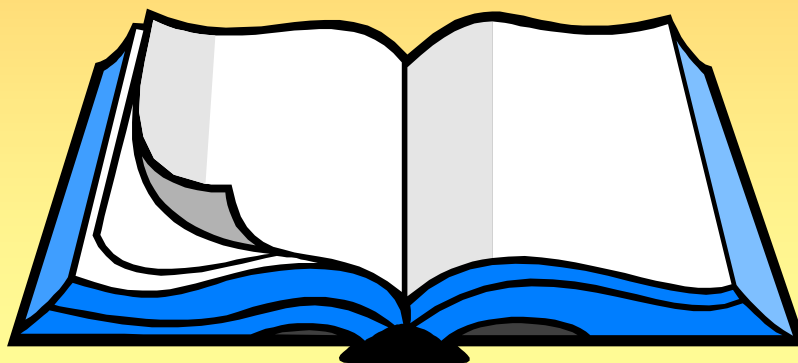
V = velocidad del sonido en el aire; t = temperatura del aire en °C.

F = fuerza eléctrica entre dos cargas puntuales;

K = constante, q_1 y q_2 = cargas eléctricas puntuales, r = distancia entre las cargas.

H = caballos de potencia de una barra giratoria;

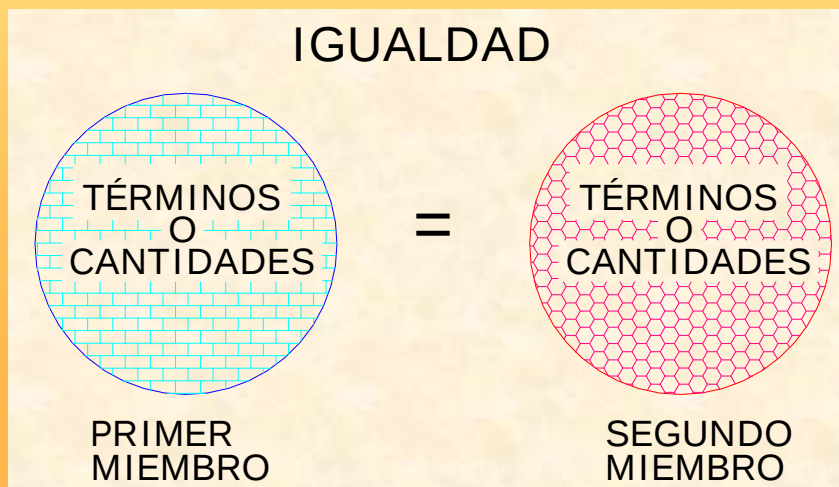
n = revoluciones por minuto, T = momento de torsión producido.



UNIDAD XX

3.23) IGUALDADES

Una igualdad es una relación entre dos expresiones que están unidas por el signo $=$. A la expresión del lado izquierdo se le llama **primer miembro** y a todo lo que está del lado derecho **segundo miembro**. La igualdad establece que el valor del primer miembro es exactamente equivalente al valor del segundo miembro. Los miembros o lados de una igualdad se componen de términos o cantidades. Esto es:



No importa cuantos términos tenga un miembro y cuantos términos tenga el otro, el signo **igual** ($=$) nos indica que todo lo que está del lado izquierdo es exactamente igual a lo que está del lado derecho.

Por ejemplo, la igualdad $x^2 - x + 12 = 0$. Su primer miembro se compone de 3 términos y el segundo miembro sólo de un término (0), sin embargo, ambos son iguales. Es decir, al sustituir algún valor de x y hacer las operaciones indicadas, en el primer miembro debe dar como resultado 0.

La igualdad se representa perfectamente por una balanza en equilibrio, de manera tal, que para que siga en equilibrio o no se altere, lo que le hagas a un platillo o a un lado de la igualdad, exactamente lo mismo le tendrás que hacer al otro platillo o lado de la igualdad. Esto es:

A los miembros de una igualdad también se les acostumbra llamar lados: lado izquierdo al primer miembro y lado derecho al segundo miembro. En Este libro usaremos lado y miembro como sinónimos.



En todas las igualdades se cumple la Propiedad Principal, la cual establece: “Si a ambos lados de una igualdad se les aplica una misma operación, la igualdad no se altera”.

De esta propiedad principal se derivan las siguientes propiedades:

PROPIEDAD REFLEXIVA $a = a$

Por ejemplo, si $x = 7$, entonces $7 = x$.

PROPIEDAD SIMÉTRICA Si $a = b$, entonces $b = a$

Por ejemplo, si $x + 3 = y$, entonces $y = x + 3$

Si $y = x^2 + 2x - 12$, entonces $x^2 + 2x - 12 = y$

Nota que podemos intercambiar los miembros de una igualdad sin que ésta se altere, es decir, el primer miembro puede pasar a ser el segundo miembro y viceversa.

PROPIEDAD TRANSITIVA Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Por ejemplo, si $x = c$ y $c = 3y$, entonces $x = 3y$ ó $3y = x$.

Por ejemplo, si $a = x$ y $x = 21$, entonces $a = 21$ ó $21 = a$.

PROPIEDAD DE LA SUMA Y RESTA: Si se suman o restan cantidades iguales a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no se altera.

Por ejemplo, a la igualdad $x + 5 = 15$, le restamos 5 a ambos miembros, queda:

$$x + 5 - 5 = 15 - 5, \text{ esto es: } x + 0 = 10, \quad \text{o sea: } x = 10.$$

Comprobación:

$$x + 5 = 10, \text{ por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda: } 10 + 5 = 15, \quad 15 = 15 \quad \text{ok.}$$

Por ejemplo, a la igualdad $x - 7 = 20$, le sumamos 7 a ambos miembros, queda:

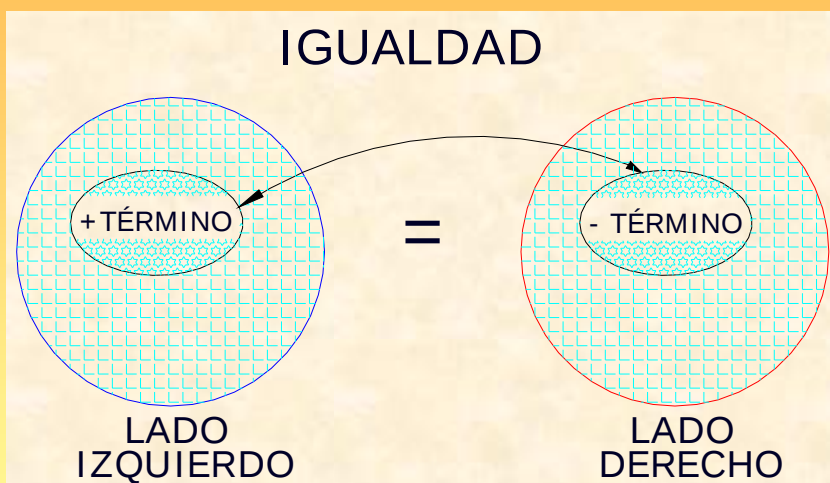
$$x - 7 + 7 = 20 + 7, \quad \text{esto es: } x + 0 = 27, \quad \text{o sea: } x = 27.$$

Comprobación:

$$x - 7 = 20, \text{ por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda: } 27 - 7 = 20, \quad 20 = 20 \quad \text{ok.}$$

Generalmente, esta propiedad en la práctica se aplica como “Si una cantidad está sumando en un miembro pasará restando al otro miembro y si está restando entonces pasará sumando”. A esto se le llama transposición de términos y al pasar los términos, estos pasarán completos, ya que no se puede pasar sólo una parte de ellos. Esto es:



Pasar de un miembro a otro, significa pasarlo de su posición actual al otro lado del signo $=$. Nota que al pasarlo, *desaparece* del lado donde estaba.

Por ejemplo, en la igualdad $x + 8 = 21$, como el 8 está sumando en el primer miembro pasa restando al segundo miembro, queda:

$$x = 21 - 8, \text{ esto es: } x = 13.$$

Comprobación:

$$x + 8 = 21, \text{ por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda: } 13 + 8 = 21, \quad 21 = 21 \quad \text{ok.}$$

Por ejemplo, en la igualdad $x - 9 = 16$, como el 9 está restando en el primer miembro pasa sumando al segundo miembro, queda:

$$x = 16 + 9, \text{ esto es: } x = 25.$$

Comprobación:

$$x - 9 = 16, \text{ por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda: } 25 - 9 = 16, \quad 16 = 16 \quad \text{ok.}$$

PROPIEDAD DE LA MULTIPLICACIÓN Y DIVISIÓN: Si se multiplican o dividen por cantidades iguales a los dos miembros de una igualdad, la igualdad no se altera.

Se debe de multiplicar o dividir sólo por una cantidad **diferente de 0**.

Por ejemplo, a la igualdad $\frac{1}{4}x = 6$, multiplicando por 4 a ambos miembros, queda:

$$(4) \left(\frac{1}{4}x \right) = (4) (6), \text{ esto es: } x = 6 (4), \text{ o sea: } x = 24.$$

Comprobación:

$$\frac{1}{4}x = 6, \text{ por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda: } \frac{1}{4} (24) = 6, \quad 24 / 4 = 6, \quad 6 = 6 \quad \text{ok.}$$

Por ejemplo, a la igualdad $2x = 16$, dividiendo entre 2 a ambos miembros, queda:

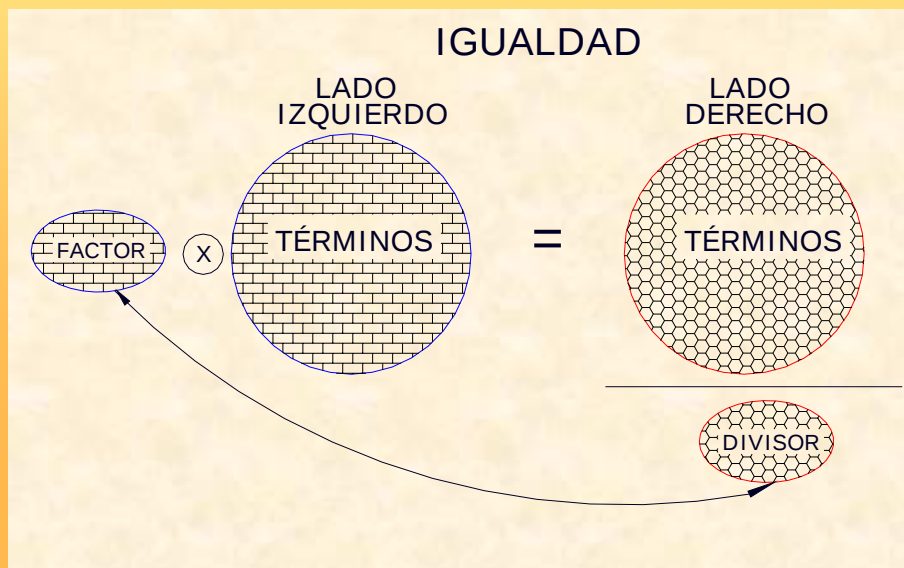
$$2x / 2 = 16 / 2, \text{ esto es: } x = 16 / 2, \quad \text{o sea: } x = 8.$$

Comprobación:

$2x = 16$, por lo tanto, sustituyendo x por su valor hallado,

Queda: $2(8) = 16$, $16 = 16$ ok.

Generalmente, esta propiedad en la práctica se aplica como "Si una cantidad está multiplicando en un miembro pasará dividiendo al otro miembro y si está dividiendo entonces pasará multiplicando".



Para poder pasar un término al otro lado de la igualdad, tiene que estar multiplicando o dividiendo a TODO el lado donde está. Y que al pasarlo, multiplicará o dividirá a TODO el lado al cual se pasa. Si no multiplica o divide a TODO, entonces no puede pasar al otro lado.

Si respetas y aplicas adecuadamente las propiedades de las igualdades, podrás resolver cualquier ecuación o podrás despejar cualquier fórmula física o matemática. De ahí la importancia de aprenderlas y aplicarlas correctamente.

Por ejemplo, a la igualdad $4x = 36$, el 4 está multiplicando a todo el primer miembro y pasa dividiendo a todo el segundo miembro, queda:

$x = 36 / 4$ esto es: $x = 9$.

Comprobación:

$4x = 36$, por lo tanto, sustituyendo x por su valor hallado,

Queda: $4(9) = 36$, $36 = 36$ ok.

Por ejemplo, a la igualdad $x / 5 = 8$, el 5 está dividiendo en el primer miembro y pasa multiplicando al segundo miembro, queda:

$$x = 8 (5), \quad \text{esto es:} \quad x = 40.$$

Comprobación:

$$x / 5 = 8, \quad \text{por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado,}$$

$$\text{Queda:} \quad 40 / 5 = 8, \quad 8 = 8 \text{ ok.}$$

En igualdades más completas, se aplican siempre las dos propiedades, generalmente, se usan para despejar una incógnita y resolver una ecuación de primer grado con una incógnita. Pero para resolverla, necesitamos despejar la incógnita, lo que significa pasar todos los términos o cantidades al lado derecho del igual (=) y dejar sólo la incógnita del lado izquierdo. Para esto, primero se realiza la reducción de términos semejantes en ambos lados de la igualdad y después se aplican sus propiedades, primero la de la suma y la resta (Transposición de Términos) y al final la de la multiplicación y división.

Ejemplos:

$$\text{Resolver} \quad -8x + 48 = 24$$

Como 48 está sumando en el primer miembro pasa restando al segundo miembro:

$$-8x = 24 - 48 = -24$$

Despejando la incógnita, como el -8 está multiplicando en el primer miembro pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = -24 / -8 = 3$$

Comprobación:

$$-8x + 48 = 24, \quad \text{por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado (3),}$$

$$\text{Queda:} \quad -8(3) + 48 = 24,$$

$$-24 + 48 = 24$$

$$24 = 24 \quad \text{ok.}$$

$$\text{Resolver} \quad x/5 - 65 = 15$$

Como 65 está restando en lado izquierdo pasa sumando al lado derecho del igual:

$$x/5 = 15 + 65 = 80$$

Despejando la incógnita, como el 5 está dividiendo en el primer miembro pasa a multiplicar al segundo miembro, esto es:

$$x = 80 \times 5 = 400$$

Comprobación:

$$x/5 - 65 = 15, \quad \text{por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado (400),}$$

$$\begin{aligned} \text{Queda} \quad : \quad & 400/5 - 65 = 15, \\ & 80 - 65 = 15 \\ & 15 = 15 \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

$$\text{Resolver} \quad 7x - 18 - 5x + 12 = 20$$

Reduciendo términos semejantes en ambos miembros, ordenando primero los términos positivos y luego los negativos, queda:

$$7x - 5x + 12 - 18 = 20$$

Restando términos semejantes:

$$2x - 6 = 20$$

$$\text{Como 6 está restando pasa sumando: } 2x = 20 + 6 = 26$$

Despejando la incógnita, como el 2 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = 26 / 2 = 13$$

Comprobación:

$$7x - 18 - 5x + 12 = 20, \quad \text{por lo tanto, sustituyendo } x \text{ por su valor hallado (13),}$$

$$\begin{aligned} \text{Queda:} \quad & 7(13) - 18 - 5(13) + 12 = 20, \\ & 91 - 18 - 65 + 12 = 20 \\ & 91 + 12 - 18 - 65 = 20 \\ & 103 - 83 = 20 \\ & 20 = 20 \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

$$\text{Resolver} \quad -3x + 11 + 13x - 5x - 23 = 38$$

Reduciendo términos semejantes en ambos miembros, ordenando primero los positivos y luego los negativos, queda:

$$\begin{aligned} 13x - 3x - 5x + 11 - 23 &= 38 \\ 13x - 8x + 11 - 23 &= 38 \end{aligned}$$

Restando términos semejantes:

$$5x - 12 = 38$$

Como 12 está restando pasa sumando al otro lado:

$$5x = 38 + 12 = 50$$

Despejando la incógnita, como el 5 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = 50 / 5 = 10$$

Comprobación:

$-3x + 11 + 13x - 5x - 23 = 38$, por lo tanto, sustituyendo x por su valor hallado (10),

$$\begin{aligned} \text{Queda:} \quad & -3(10) + 11 + 13(10) - 5(10) - 23 = 38, \\ & -30 + 11 + 130 - 50 - 23 = 38 \\ & 11 + 130 - 30 - 50 - 23 = 38 \\ & 141 - 103 = 38 \\ & 38 = 38 \end{aligned}$$

5) Resolver $8x + 23 - 5x + 3x + 18 - 2x = 4x - 27 + 3x - 5x + 17 - 9$

Reduciendo términos semejantes en ambos miembros, ordenando primero los positivos y luego los negativos, queda:

$$\begin{aligned} 8x + 3x - 5x - 2x + 23 + 18 &= 4x + 3x - 5x + 17 - 27 - 9 \\ 11x - 7x + 41 &= 7x - 5x + 17 - 36 \end{aligned}$$

Restando términos semejantes: $4x + 41 = 2x - 19$

Pasando la incógnita al lado izquierdo y el número al lado derecho, aplicando la propiedad de que si está sumando pasa restando y viceversa, queda:

$$\begin{aligned} 4x - 2x &= -19 - 41 \\ 2x &= -60 \end{aligned}$$

Despejando la incógnita, como el 2 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = -60 / 2 = -30$$

6) Resolver $-6x - 17 - 5x + 7x + 19 - 3x = -7x - 16 + 9x - 4x + 27 - 8$

Reduciendo términos semejantes en ambos miembros, ordenando primero los positivos y luego los negativos, queda:

$$7x - 6x - 5x - 3x + 19 - 17 = 9x - 7x - 4x + 27 - 16 - 8$$

$$7x - 14x + 2 = 9x - 11x + 27 - 24$$

Restando:

$$-7x + 2 = -2x + 3$$

Pasando la incógnita al lado izquierdo y el número al lado derecho, aplicando la propiedad de que si está sumando pasa restando y viceversa, queda:

$$-7x + 2x = 3 - 2$$

$$-5x = 1$$

Despejando la incógnita, como el -5 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = 1 / -5 = -1/5$$

Otras propiedades importantes de las igualdades son:

PROPIEDAD DE LA POTENCIACIÓN: Si los dos miembros de una igualdad se elevan a un mismo exponente, la igualdad no se altera.

Por ejemplo:

Sea $v = \sqrt{2gh}$

Si deseamos despejar h

Elevamos al cuadrado ambos miembros

Queda :

$$(v)^2 = (\sqrt{2gh})^2$$

$$v^2 = 2gh$$

Como 2g está multiplicando, pasa dividiendo:

$$h = \frac{v^2}{2g}$$

PROPIEDAD DE LA RADICACIÓN: Si a los dos miembros de una igualdad se les extrae una misma raíz la igualdad no se altera.

Por ejemplo:

$$\text{Sea } x^2 + y^2 = r^2$$

Si deseamos despejar y

Pasando x^2 al otro lado del igual :

$$y^2 = r^2 - x^2$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros

Queda :

$$\sqrt{y^2} = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Finalmente :

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

LAS IGUALDADES SE CLASIFICAN EN: ECUACIONES E IDENTIDADES.

Ecuación: es aquella igualdad que sólo se cumple para algunos valores de las literales que la componen.

Por ejemplo, la ecuación $3x + 9 = 24$, sólo se cumple para $x = 5$, esto es:

$$\begin{aligned} 3(5) + 9 &= 24 \\ 15 + 9 &= 24 \\ 24 &= 24 \quad \text{Ok.} \end{aligned}$$

Por ejemplo, la ecuación $x^2 + x - 6 = 0$, solo se cumple cuando $x = 2$ y $x = -3$.

$$\begin{aligned} \text{Esto es: Para } x = 2, \quad (2)^2 + 2 - 6 &= 0 \\ 4 + 2 - 6 &= 0 \\ 6 - 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ Ok.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{También: Para } x = -3, \quad (-3)^2 + (-3) - 6 &= 0 \\ 9 - 3 - 6 &= 0 \\ 9 - 9 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ Ok.} \end{aligned}$$

Identidad: es aquella igualdad que se cumple para cualquier valor de las literales que la componen.

Por ejemplo, la identidad $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, se cumple para cualquier valor de a y b , por ejemplo, sea $a = 6$ y $b = 3$, queda:

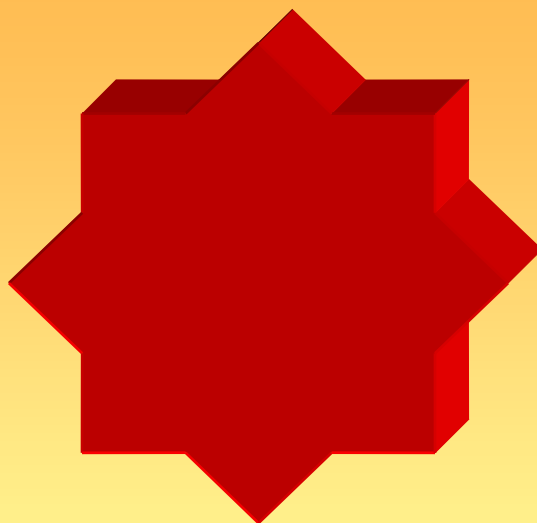
$$\begin{aligned}(6 + 3)^2 &= 6^2 + 2(6)(3) + 3^2 \\ (9)^2 &= 36 + 36 + 9 \\ 81 &= 81 \quad \text{Ok.}\end{aligned}$$

Por ejemplo, la identidad $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$, se cumpla para cualquier valor de x e y , por ejemplo, sea $x = 4$ e $y = 2$, queda:

$$\begin{aligned}(4 + 2)(4 - 2) &= 4^2 - 2^2 \\ (6)(2) &= 16 - 4 \\ 12 &= 12 \quad \text{Ok.}\end{aligned}$$

EJERCICIO 30 Utilizando las propiedades de las igualdades resolver las siguientes:

- 1) $2x + 12 = 24$
- 2) $3x - 20 = -8$
- 3) $\frac{1}{2}x = 17$
- 4) $\frac{3}{4}x = 12$
- 5) $2x + 10 = 3x + 1$
- 6) $\frac{1}{2}x - 8 = \frac{1}{4}x - 5$
- 7) $4x - 12 + 3x + 9 - 5x - 24 + 6 - x + 12 = 0$
- 8) $15x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x = 12\,600$
- 9) $x + x + 1 + x + 3 = 216$
- 10) $2x - x + 12 + 4x + 30 = 57$



UNIDAD XXI

3.24) ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Es aquella ecuación cuyo grado máximo es 1 y tiene una sola incógnita. También, se le llama *ecuación lineal* ya que su gráfica en un sistema de coordenadas es una línea recta.

Su forma general es: $ax + b = c$

Y su solución está dada por: $x = (c - b) / a$

REGLA PARA RESOLVER UNA ECUACIÓN DE PRIMER GRADO CON UNA INCÓGNITA

Esto se resume en la regla siguiente:

Para resolver una ecuación es necesario despejar la incógnita, mediante la reducción de términos semejantes y aplicando las propiedades de las igualdades. Respete siempre la jerarquía de las operaciones.

Ejemplos:

Resolver $4x - 20 = 8$

Como el 20 está restando, pasa sumando:

$$\begin{aligned} 4x &= 8 + 20 \\ 4x &= 28 \end{aligned}$$

Como el 4 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 28 / 4 = 7$$

Por lo tanto, la solución es: $x = 7$.

Comprobación:

$4x - 20 = 8$, por lo tanto, sustituyendo x por su valor hallado (7),

$$\begin{aligned} \text{Queda:} \quad & 4(7) - 20 = 8, \\ & 28 - 20 = 8 \\ & 8 = 8 \text{ ok.} \end{aligned}$$

Resolver $-x/3 - 12 = -26$

Como el 12 está restando, pasa sumando:

$$\begin{aligned} -x/3 &= -26 + 12 \\ x/-3 &= -14 \end{aligned}$$

Como el -3 está dividiendo pasa multiplicando. Nota que pasa multiplicando con su signo.

$$x = -14 \times -3 = 42$$

Por lo tanto, la solución es $x = 42$.

Comprobación:

$-x/3 - 12 = -26$, por lo tanto, sustituyendo x por su valor hallado (42),

$$\begin{aligned} \text{Queda:} \quad & - (42)/3 - 12 = -26, \\ & -14 - 12 = -26 \\ & -26 = -26 \quad \text{ok.} \end{aligned}$$

3) Resolver $-9x + 12 - 4x + 5x + 18 - 6x - 14 = 12x - 64 + 4x - 6x + 17 + 19$

Reduciendo términos semejantes en ambos miembros, ordenando primero los positivos y luego los negativos, queda:

$$5x - 9x - 4x - 6x + 12 + 18 - 14 = 12x + 4x - 6x + 17 + 19 - 13$$

$$5x - 19x + 30 - 14 = +36 - 64$$

Reduciendo términos semejantes:

$$-14x + 16 = 10x - 28$$

Pasando la incógnita al lado izquierdo y el número al lado derecho, aplicando la propiedad de que si está sumando pasa restando y viceversa, queda:

$$\begin{aligned} -14x - 10x &= -28 - 16 \\ -24x &= -44 \end{aligned}$$

Despejando la incógnita, como el -24 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, esto es:

$$x = -44 / -24 = 22 / 12 = 11 / 6$$

4) Resolver $\frac{1}{2}x - 16 - \frac{1}{4}x + 4x + 12 - 2x = -6x - 6 + 9x - 5x + 24 - 8$

Reduciendo términos semejantes, ordenando primero los positivos y luego los negativos, queda:

$$\frac{1}{2}x + 4x - \frac{1}{4}x - 2x + 12 - 16 = 9x - 6x - 5x + 24 - 6 - 8$$

Haciendo las operaciones con fracciones:

$$\frac{9}{2}x - \frac{9}{4}x - 4 = 9x - 11x + 24 - 14$$

Restando términos semejantes:

$$\frac{9}{4}x - 4 = -2x + 10$$

Pasando la incógnita al lado izquierdo y el número al lado derecho, aplicando la propiedad de que si está sumando pasa restando y viceversa, queda:

$$\frac{9}{4}x + 2x = 10 + 4$$

$$\frac{17}{4}x = 14$$

Despejando la incógnita, como el 17 está multiplicando pasa a dividir al segundo miembro, también, como el 4 está dividiendo pasa multiplicando, esto es:

$$x = 14 (4) / 17 = \frac{56}{17} = 3 \frac{5}{17}$$

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita, son muy útiles para resolver problemas de la vida real, en los cuales se tiene una cantidad desconocida. Tal como se ilustra en los ejemplos siguientes.

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA ECUACION DE PRIMER GRADO

Para resolver problemas de la vida real que involucre una incógnita o varias cantidades desconocidas pero relacionadas entre sí, se recomienda seguir los pasos siguientes:

- ❖ Lea el enunciado del problema detenidamente.
- ❖ Sí es posible trace una figura o esquema que ilustre el problema.
- ❖ Identifique la cantidad o cantidades que se pide hallar. Elija una variable para representar la cantidad desconocida, siempre elija ésta como la cantidad que más se relacione con las otras cantidades pedidas.

- ❖ Establezca las relaciones entre las demás cantidades desconocidas y escriba la ecuación que represente el problema dado.
- ❖ Efectué la reducción de términos semejantes en ambos lados del igual.
- ❖ Transponga los términos utilizando las propiedades de las igualdades, de manera tal, que los números queden del lado derecho del igual y la incógnita del lado izquierdo.
- ❖ Despeje la incógnita y halle su valor.
- ❖ Compruebe que la solución al problema real es correcta.

Ejemplos:

1.- Una botella y su tapón cuestan \$3.20 pesos. Sabiendo que la botella cuesta \$ 3 pesos más que el tapón ¿cuánto cuesta cada cosa?

Como sólo son dos incógnitas, cualquiera puede escogerse como la incógnita: Designando a la incógnita como el precio de la botella, queda:

Objeto	Expresión	Explicación
Botella	x	Incógnita
Tapón	$x - 3$	Porque cuesta 3 pesos menos que la botella
Ecuación	$x + x - 3 = 3.20$	Porque ambos cuestan \$ 3.20 pesos

Resolviendo la ecuación: $x + x - 3 = 3.20$

Queda: $2x - 3 = 3.20$

Pasando el -3 al otro lado del igual como $+3$:

$$2x = 3.20 + 3$$

$$2x = 6.20$$

Como el 2 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 6.20 / 2 = 3.10 \text{ pesos} \quad \text{Costo de la botella}$$

Por lo tanto, el tapón cuesta: $x - 3 = 3.10 - 3 = 0.10 \text{ pesos}$

Comprobación:

Objeto	Expresión	Costo en pesos
Botella	x	3.10 pesos
Tapón	$x - 3$	$3.10 - 3 = 0.10 \text{ pesos}$
Ecuación	$x + x - 3 = 3.20$	$3.10 + 0.10 = \$ 3.20 \text{ pesos ok.}$

2.- Lucyana y Lupita compraron un traje de \$ 599 pesos. Si Luciana aportó \$ 213 pesos más que Lupita ¿cuánto aportó cada cual?

Como sólo son dos incógnitas, cualquiera puede escogerse como la incógnita: Designando a la incógnita como la cantidad que aportó Lupita, queda:

Persona	Expresión	Explicación
Lupita	x	Incógnita
Luciana	$x + 213$	Porque aportó \$ 213 pesos más que Lupita
Ecuación	$x + x + 213 = 599$	Porque ambas aportaron en total \$ 599 pesos

Resolviendo la ecuación: $x + x + 213 = 599$

Queda: $2x + 213 = 599$

Pasando el +213 al otro lado del igual como -213 :

$$2x = 599 - 213$$

$$2x = 386$$

Como el 2 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 386 / 2 = 193 \text{ pesos} \quad \text{Cantidad aportada por Lupita}$$

Por lo tanto, Luciana aportó: $x + 213 = 193 + 213 = 406 \text{ pesos}$

Comprobación:

Persona	Expresión	Cantidad aportada en pesos
Lupita	x	193 pesos
Luciana	$x + 213$	$193 + 213 = 406 \text{ pesos}$
Ecuación	$x + x + 213 = 599$	$193 + 406 = \$ 599 \text{ pesos ok.}$

3.- En el Parque Jurásico cobran la entrada normal a \$ 18 pesos por persona. Pero tienen boletos con descuento a \$15.50 pesos. Si se obtuvieron \$ 6359 pesos por la venta de boletos en un día y se vendieron 363 boletos en total ¿cuántos boletos con descuento se vendieron ese día?

Como sólo son dos incógnitas, cualquiera puede escogerse como la incógnita:

Designando a la incógnita x como la cantidad de boletos con descuento, recordando que el importe por tipo de boletos está dado por:

Importe por boleto = precio del boleto x cantidad vendida de boletos

Queda:

Boletos	Expresión	Explicación
Con descuento	x $15.50 x$	x es el número de boletos con descuento vendidos y el importe se obtiene multiplicando por su precio.
Luciana	$363 - x$ $18 (363 - x)$	Como en total se vendieron 363 boletos, entonces, $363 - x$ es el número de boletos normales vendidos y el importe se obtiene multiplicando por su precio.
Ecuación	$15.50x + 18 (363 - x)$ $= 6359$	Porque la venta de ambos boletos durante el día tuvo un importe de \$ 6359 pesos

Resolviendo la ecuación: $15.50x + 18 (363 - x) = 6359$

Quitando paréntesis, para lo cual realizamos la multiplicación, queda:

$$15.50x + 6534 - 18x = 6359$$

Reduciendo términos semejantes:

$$\begin{aligned} 15.50x - 18x + 6534 &= 6359 \\ -2.50x + 6534 &= 6359 \end{aligned}$$

Pasando el $+6534$ al otro lado del igual como -6534 :

$$\begin{aligned} -2.50x &= 6359 - 6534 \\ -2.50x &= -175 \end{aligned}$$

Como el -2.50 está multiplicando pasa dividiendo, junto con su signo:

$$x = -175 / -2.50 = 70 \text{ boletos} \quad \text{Número de boletos con descuento}$$

Por lo tanto, el número de boletos normales vendidos fue: $363 - x = 363 - 70 = 293$ boletos normales.

Comprobación:

Boletos	Expresión	Importe por boleto
Con descuento	x $15.50 x$	70 es el número de boletos con descuento vendidos y su importe es $15.50 (70) = 1085$ pesos
Luciana	$363 - x$ $18 (363 - x)$	$363 - 70 = 293$ es el número de boletos normales vendidos y su importe es $18(293) = 5274$ pesos.
Ecuación	$15.50x + 18 (363 - x)$ $= 6359$	$1085 + 5274 = 6359$ pesos ok.

4.- El segundo número de la combinación para abrir una caja fuerte es el doble del primero y el tercer número es $\frac{1}{4}$ del segundo. Si la suma de los números en la combinación es de 42 ¿Cuál es la combinación?

Designando a la incógnita x como el primer número de la combinación, queda:

Número	Expresión	Explicación
Primero	x	Incógnita
Segundo	$2x$	Porque el segundo número es el doble del primero.
Tercero	$\frac{1}{4} (2x) = 2x/4 = \frac{1}{2} x$	Porque el tercer número es $\frac{1}{4}$ del segundo ($2x$).
Ecuación	$x + 2x + \frac{1}{2} x = 42$	Porque los tres números suman 42.

Resolviendo la ecuación: $x + 2x + \frac{1}{2} x = 42$

Multiplicando por 2 toda la ecuación para quitar el denominador 2, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x + 4x + 2/2 x &= 84 \\ 2x + 4x + x &= 84 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$7x = 84$$

Como el 7 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 84 / 7 = 12 \quad \text{Primer número de la combinación}$$

Por lo tanto, el segundo número es: $2x = 2(12) = 24$ **segundo número.**

Y el tercer número es: $\frac{1}{4} (2x) = \frac{1}{2} x = \frac{1}{2} (12) = 6$ **tercer número.**

Por lo tanto la combinación es: $12 + 24 + 6$

Comprobación:

Número	Expresión	Valor
Primero	x	12
Segundo	$2x$	$2(12) = 24$ porque es el doble del primero.
Tercero	$\frac{1}{4} (2x) = 2x/4 = \frac{1}{2} x$	$24/4 = 6$ porque el tercer número es $\frac{1}{4}$ del segundo
Ecuación	$x + 2x + \frac{1}{2} x = 42$	$12 + 24 + 6 = 42.$ Ok.

5.- Matuco compró cuatro regalos con un importe total de \$3600 pesos, uno es para Yolanda, otro para Elisa, otro para María y otro para Patricia. Si el regalo de Elisa costó lo doble que el de Yolanda, el de María la mitad del de Yolanda y el de Patricia lo triple que el de María ¿Cuánto costó cada regalo?

Designando el regalo de Yolanda como la incógnita x , queda:

Persona	Expresión	Explicación
Yolanda	x	Incógnita
Elisa	$2x$	Porque costó el doble que el de Yolanda.
María	$\frac{1}{2} (x) = \frac{1}{2} x$	Porque costó la mitad que el de Yolanda.
Patricia	$3 (\frac{1}{2} x) = \frac{3}{2} x$	Porque costó lo triple que el de María.
Ecuación	$x + 2x + \frac{1}{2} x + \frac{3}{2} x = 3600$	Porque los 4 regalos costaron \$ 3600.

Resolviendo la ecuación: $x + 2x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = 3600$

Multiplicando por 2 toda la ecuación para quitar el denominador 2, se tiene:

$$\begin{aligned} 2x + 4x + \frac{2}{2}x + \frac{6}{2}x &= 7\,200 \\ 2x + 4x + x + 3x &= 7\,200 \end{aligned}$$

Reduciendo términos semejantes:

$$10x = 7\,200$$

Como el 10 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 7\,200 / 10 = \$ 720 \text{ pesos} \quad \text{Costo del regalo de Yolanda}$$

Por lo tanto, el segundo regalo costó: $2x = 2(720) = \$ 1\,440$ pesos costó el de Elisa.

El tercer regalo costó: $\frac{1}{2}x = \frac{1}{2}(720) = 720/2 = \$ 360$ pesos costó el de María.

Y el cuarto regalo costó $\frac{3}{2}x = \frac{3}{2}(720) = 2\,160/2 = \$ 1\,080$ pesos costó el de Patricia.

Comprobación:

Persona	Expresión	Costo del regalo
Yolanda	x	\$ 720 pesos
Elisa	$2x$	$2(720) = \$ 1\,440$ pesos. Porque costó el doble que el de Yolanda.
María	$\frac{1}{2}(x) = \frac{1}{2}x$	$\frac{1}{2}(720) = \$ 360$ pesos. Porque costó la mitad que el de Yolanda.
Patricia	$3(\frac{1}{2}x) = \frac{3}{2}x$	$3(360) = \$ 1\,080$ pesos. Porque costó lo triple que el de María.
Ecuación	$x + 2x + \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x = 3600$	$720 + 1440 + 360 + 1080 = 3600$ pesos. Ok. Porque los 4 regalos costaron \$ 3600.

6.- La suma de 3 números consecutivos es igual a 228 ¿Cuáles son los números? Designando el primer número como la incógnita x , tomando en cuenta que si los números son consecutivos, entonces el segundo número es mayor al primero en 1 y el tercer número es mayor al primer número en 2 unidades, esto es:

4, 5, 6; son consecutivos, lo mismo que 21, 22, 23 y 69, 70, 71.

Número	Expresión	Explicación
Primero	x	Incógnita
Segundo	$x + 1$	Porque entre el segundo y el primer número hay diferencia de 1.
Tercero	$x + 2$	Porque entre el tercero y el primer número hay diferencia de 2.
Ecuación	$x + x + 1 + x + 2 = 228$	Porque los 3 números suman 228.

Resolviendo la ecuación: $x + x + 1 + x + 2 = 228$

Reduciendo términos semejantes:

$$3x + 3 = 228$$

Como el 3 esta sumando, pasa restando al otro lado del igual:

$$3x = 228 - 3 = 225$$

Como el 3 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 225 / 3 = 75 \quad \text{el primer numero}$$

Por lo tanto, el segundo número es: $x + 1 = 75 + 1 = 76$ el segundo número
Y el tercer número es: $x + 2 = 75 + 2 = 77$ el tercer número.

Comprobación:

Número	Expresión	Explicación
Primero	x	75
Segundo	$x + 1$	$75 + 1 = 76$. Porque entre el segundo y el primer número hay diferencia de 1.
Tercero	$x + 2$	$75 + 2 = 77$. Porque entre el tercero y el primer número hay diferencia de 2.
Ecuación	$x + x + 1 + x + 2 = 228$	$75 + 76 + 77 = 228$. Porque los 3 números suman 228. Ok.

Es interesante ver, que si sumamos 3 números consecutivos, su suma presenta una regularidad, esto es:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + 3 &= 6 \\ 4 + 5 + 6 &= 15 \\ 7 + 8 + 9 &= 24 \\ 10 + 11 + 12 &= 33 \\ 13 + 14 + 15 &= 42 \\ 16 + 17 + 18 &= 51 \\ 19 + 20 + 21 &= 60 \\ \text{Etc.} \end{aligned}$$

Si son observadores notarán que la suma de los tres números consecutivos es igual al producto de 3 por el segundo número, o sea:

$$\begin{aligned} 3(2) &= 6 \\ 3(5) &= 15 \\ 3(8) &= 24 \\ 3(11) &= 33 \\ 3(14) &= 42 \\ 3(17) &= 51 \\ 3(20) &= 60 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Note también que entre un segundo número y otro su diferencia es 3 y que entre una suma y otra su diferencia es de 9.

Demostración:

La suma de 3 números consecutivos es igual a: $x + x+1 + x+2 = s$

Donde s es la suma de los 3 números.

Reduciendo términos, $3x + 3 = s$

Factorizando el 3, queda: $3(x + 1) = s$

Pero como el segundo número es $x + 1$, queda:

$3(\text{segundo número}) = \text{suma de los 3 números consecutivos.}$

En nuestro ejemplo anterior, el segundo número es 76. Por lo tanto, la suma de los 3 números consecutivos es: $3(76) = 228$ Ok.

7.- La suma de 3 números pares consecutivos es igual a 378 ¿Cuáles son los números?

Designando el primer número como la incógnita x , tomando en cuenta que si los números son consecutivos, entonces el segundo número es mayor al primero en 2 y el tercer número es mayor al primer número en 4 unidades, debido a que son pares, esto es: 2, 4, 6; son pares consecutivos, lo mismo que 10, 12, 14 y 50, 52, 54.

Número	Expresión	Explicación
Primero	x	Incógnita
Segundo	$x + 2$	Porque entre el segundo y el primer número hay diferencia de 2.
Tercero	$x + 4$	Porque entre el tercero y el primer número hay diferencia de 4.
Ecuación	$x + x + 2 + x + 4 = 378$	Porque los 3 números suman 378.

Resolviendo la ecuación: $x + x + 2 + x + 4 = 378$

Reduciendo términos semejantes:

$$3x + 6 = 378$$

Como el 6 esta sumando, pasa restando al otro lado del igual:

$$3x = 378 - 6 = 372$$

Como el 3 está multiplicando pasa dividiendo:

$$x = 372 / 3 = 124 \quad \text{el primer numero}$$

Por lo tanto, el segundo número es:

$$x + 2 = 124 + 2 = 126 \quad \text{el segundo número}$$

Y el tercer número es: $x + 4 = 124 + 4 = 128$ el tercer número.

Comprobación:

Número	Expresión	Explicación
Primero	x	124
Segundo	$x + 2$	$124 + 2 = 126$. Porque entre el segundo y el primer número hay diferencia de 2.
Tercero	$x + 4$	$124 + 4 = 128$. Porque entre el tercero y el primer número hay diferencia de 4.
Ecuación	$x + x + 2 + x + 4 = 378$	$124 + 126 + 128 = 378$. Porque los 3 números suman 378. Ok.

Note que se sigue aplicando que:

3 (segundo número par de la serie) = suma de los 3 números pares consecutivos.

EJERCICIO 31 Resolver las siguientes ecuaciones de primer grado con una incógnita:

- $5x + 3x + 16 - 11x - 43 = -54$
- $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}x + 8 - \frac{3}{4}x - 48 + 6x = 80$
- $-7x + \frac{1}{2}x + 9x - 14 + 56 = 5x - 3x + 28 - 9x - 5$
- $8x + 6x - 16 + 9x - 63 = x - 3x + 100 + 11x + 3$
- $x - 3x + 33 + 7x - 21 = 3x - x - 27 + 45$
- Hallar cuatro números impares consecutivos cuya suma sea 280.
- Hallar cuatro números pares consecutivos cuya suma sea 124.
- Un campesino compró un burro, sus arreos, su silla de montar y sus herraduras por un total de \$ 16 750 pesos. Sabiendo que el burro costó 15 veces más que la silla; que los arreos costaron la mitad que la silla y que las herraduras costaron la cuarta parte de la silla. Hallar el precio de cada cosa.
- Las entradas de un teatro valen \$ 50 pesos para adultos y \$ 20 pesos para los niños. Sabiendo que asistieron 280 personas y que la recaudación por entradas fue de \$ 8 000 pesos, hallar el número de niños que asistieron a la función.
- Un empleado cobra \$ 200 pesos diarios cuando asiste a su trabajo y cuando no lo hace le descuentan \$ 50 pesos. Sabiendo que al cabo de 25 días la cantidad que recibe es de \$ 4500 pesos, hallar el número de días que asistió a trabajar.
- La edad actual de Juan es el doble que la de Fernando. Hace 5 años Juan era tres veces mayor que Fernando. Hallar sus edades actuales.

12. Hallar tres números cuya suma sea 54, sabiendo que el primero es igual al doble del segundo más 4 y que el tercero es igual al doble del primero.
13. Hallar un número sabiendo que su mitad es igual a su sexta parte más 10.
14. Hallar dos números cuya diferencia es 20 y cuya suma es 48.

UNIDAD XXII

3.25) SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON 2 INCÓGNITAS

Un **sistema** es un conjunto de elementos relacionadas entre sí para lograr un mismo objetivo.

Esto significa que el sistema tendrá al menos dos elementos y deberán tener alguna relación entre sí, para que puedan lograr un objetivo común.

Una **ecuación lineal** con dos incógnitas (variables) x e y , tiene la forma:

$ax + by = c$, siendo a , b , c constantes y a , b distintos de 0. Esto representa la gráfica de una línea recta, de ahí que a éste tipo de ecuaciones se les llame *lineales*.

Si se tienen dos ecuaciones lineales, las cuales tienen alguna relación entre sí, entonces se dice que se tiene un **sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** (variables).

Esto es:

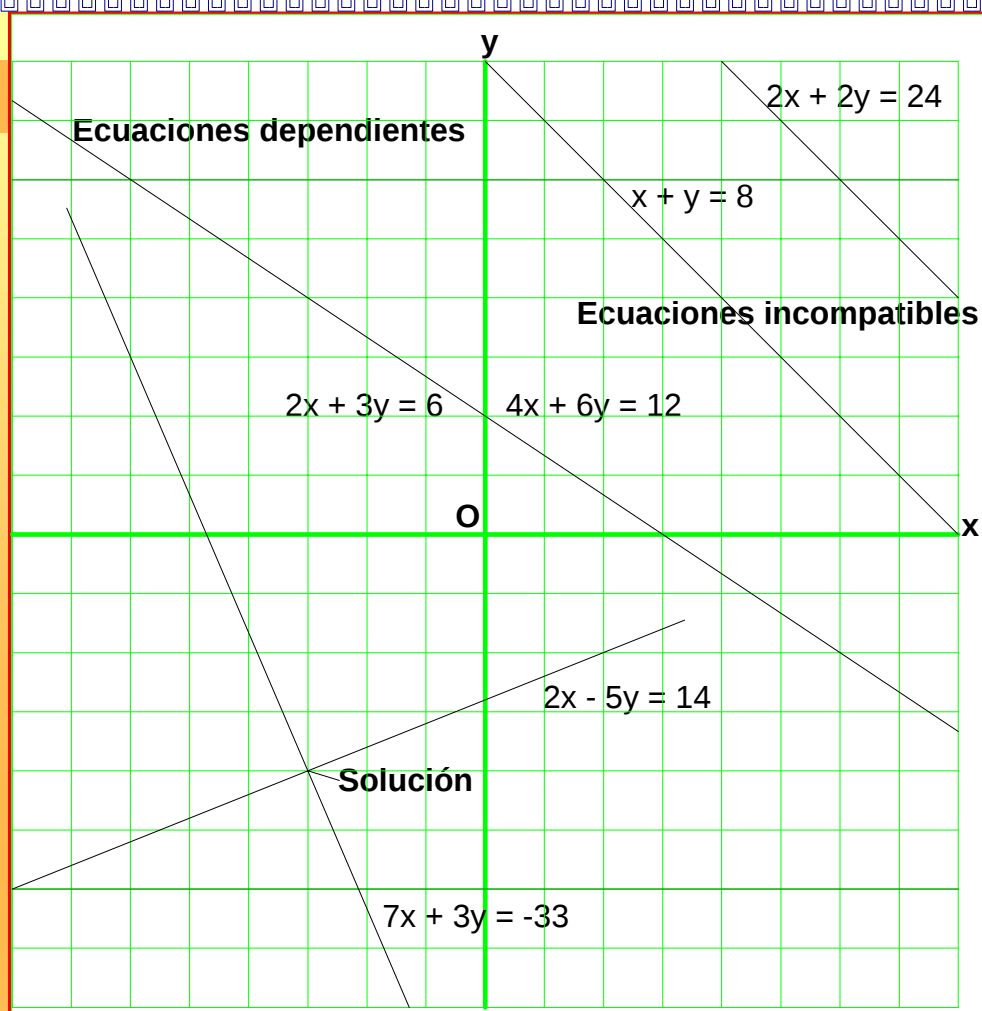
$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

También, se les denomina **sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas**. La palabra *simultánea* significa que los valores hallados de x e y , deben satisfacer las dos ecuaciones al mismo tiempo.

Por lo anterior, resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas, es hallar los valores de las incógnitas x e y , que satisfacen las dos ecuaciones al mismo tiempo.

En virtud, que cada ecuación lineal representa una línea recta, si el sistema tiene solución, ésta nos representa el punto de intersección de las dos rectas. Si no existe solución, significa que las rectas son paralelas o se sobreponen.

Gráficamente:



En la gráfica anterior se observa que: cuando las dos líneas rectas obtenidas a partir de las ecuaciones del sistema, **se cruzan o interceptan**, entonces el sistema tiene una solución única, tal como ocurre con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} \text{(E1)} & 2x - 5y & = 14 \\ \text{(E2)} & 7x + 3y & = -33 \end{array}$$

Gráficamente se observa que su punto de intersección tiene coordenadas $(-3, -4)$, es decir, su solución es: $x = -3$, $y = -4$.

También, vemos que: cuando las dos líneas rectas obtenidas a partir de las ecuaciones del sistema, **son paralelas**, entonces el sistema no tiene solución, ya que las rectas jamás se interceptarán, tal como ocurre con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} \text{(E1)} & x + y & = 8 \\ \text{(E2)} & 2x + 2y & = 24 \end{array}$$

Cuando se presenta este caso, se dice que **las ecuaciones son incompatibles**.

Además, vemos que: cuando las dos líneas rectas obtenidas a partir de las ecuaciones del sistema, **coinciden**, es decir, representan la misma recta, entonces el sistema tiene infinitud de soluciones, ya que todos los puntos de la recta constituyen una solución, tal como ocurre con el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{lcl} \text{(E1)} & 2x + 3y & = 6 \\ \text{(E2)} & 4x + 6y & = 12 \end{array}$$

Cuando se presenta este caso, se dice que **las ecuaciones son dependientes**, ya que una de las ecuaciones se obtiene al multiplicar la otra ecuación por una constante. Observe que si se multiplica por 2 la ecuación (E1) obtenemos la ecuación (E2).

Para resolver un sistema de ecuaciones se tienen dos tipos de métodos:

Métodos analíticos, que se clasifica en: método de reducción, método de sustitución, método de igualación y el método de determinantes.

Método gráfico

Primero trataremos los métodos analíticos de reducción, sustitución, igualación y el de determinantes.

3.25.1) MÉTODO DE REDUCCIÓN

Consiste en multiplicar una de las dos ecuaciones por un número, de manera tal que los coeficientes de una de las incógnitas en ambas ecuaciones sea el mismo. Después, si los signos son distintos sumamos algebraicamente las dos ecuaciones y si son del mismo signo a una ecuación le restamos algebraicamente la otra.

Ejemplos:

Resolver por el método de reducción el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{lcl} \text{(E1)} & 4x - 5y & = -8 \\ \text{(E2)} & 3x + y & = 13 \end{array}$$

Si deseamos eliminar y , vemos que es necesario multiplicar toda la ecuación (E2) por 5 y obtendremos $+ 5y$, como es de signo contrario a $-5y$, entonces después sumamos algebraicamente las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{ll}
 \text{Esto es:} & (E1) \quad 4x - 5y = -8 \\
 \text{5 por} & (E2) \quad 15x + 5y = 65 \\
 \text{Sumando:} & 19x = 57
 \end{array}$$

Por lo tanto, $x = 57 / 19 = 3$

Sustituyendo $x = 3$, en cualquiera de las dos ecuaciones, en este caso en la (E1), se tiene:

$$\begin{aligned}
 4x - 5y &= -8 \\
 4(3) - 5y &= -8 \\
 -5y &= -8 \\
 -5y &= -8 - 12 = -20 \\
 y &= -20 / -5 = 4
 \end{aligned}$$

La solución es $x = 3$, $y = 4$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, (3, 4).

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{array}{ll}
 (E1) & 4x - 5y = -8 \\
 (E2) & 3x + y = 13
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (E1) & 4(3) - 5(4) = -8 \\
 (E2) & 3(3) + 4 = 13
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (E1) & 12 - 20 = -8 \\
 (E2) & 9 + 4 = 13
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 (E1) & -8 = -8 \\
 (E2) & 13 = 13
 \end{array}$$

Ok.

Resolver por el método de reducción el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 (E1) & -4x + 7y = 51 \\
 (E2) & 5x + 3y = -5
 \end{array}$$

Si deseamos eliminar x , como los coeficientes de x en las dos ecuaciones son distintos, necesitamos multiplicar **toda** la ecuación (E1) por 5 y **toda** la ecuación (E2) por 4, obtendremos el mismo coeficiente de x en ambas ecuaciones, como son de signo contrario, entonces después sumamos algebraicamente las dos ecuaciones.

Esto es:

$$\begin{array}{ll} 5 \text{ por} & \text{(E1)} \quad -20x + 35y = 255 \\ 4 \text{ por} & \text{(E2)} \quad 20x + 12y = -20 \\ \text{Sumando:} & 47y = 235 \end{array}$$

Por lo tanto, $y = 235 / 47 = 5$

Sustituyendo $y = 5$, en cualquiera de las dos ecuaciones, en este caso en la (E2), se tiene:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= -5 \\ 5x + 3(5) &= -5 \\ 5x + 15 &= -5 \\ 5x &= -5 - 15 = -20 \\ x &= -20 / 5 = -4 \end{aligned}$$

La solución es $x = -4$, $y = 5$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $(-4, 5)$.

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{array}{ll} \text{(E1)} & -4x + 7y = 51 \\ \text{(E2)} & 5x + 3y = -5 \\ \\ \text{(E1)} & -4(-4) + 7(5) = 51 \\ \text{(E2)} & 5(-4) + 3(5) = -5 \\ \\ \text{(E1)} & 16 + 35 = 51 \\ \text{(E2)} & -20 + 15 = -5 \\ \text{(E1)} & 51 = 51 \\ \text{(E2)} & -5 = -5 \quad \text{Ok.} \end{array}$$

En general, cuando los coeficientes de la variable a eliminar son diferentes de 1, entonces, el coeficiente de la primera multiplica a la segunda ecuación y el coeficiente de la segunda multiplica a la primera ecuación. Si resultan los coeficientes de signo distinto sumamos algebraicamente y si son del mismo signo realizamos la resta algebraica de las ecuaciones dadas.

EJERCICIO 32 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de reducción:

$$\begin{array}{ll} 1) & \text{(E1)} \quad 8x - 2y = 28 \\ & \text{(E2)} \quad -2x + 4y = -14 \\ \\ 2) & \text{(E1)} \quad 11x - 2y = 13 \\ & \text{(E2)} \quad -x + 9y = -10 \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
 3) & \begin{array}{l} \text{(E1)} \quad 4x - 7y = -48 \\ \text{(E2)} \quad -3x + 2y = 23 \end{array} \\
 4) & \begin{array}{l} \text{(E1)} \quad \frac{4}{3}x - 6y = 22 \\ \text{(E2)} \quad -6x + 5y = -33 \end{array} \\
 5) & \begin{array}{l} \text{(E1)} \quad 7x - 5y = -12 \\ \text{(E2)} \quad -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = 0 \end{array}
 \end{array}$$

UNIDAD XXIII

3.25.2) MÉTODO DE SUSTITUCIÓN

Consiste en *despejar* cualquiera de las variables en una ecuación y *sustituir* su valor despejado en la otra ecuación. Después se realizan las operaciones para hallar el valor de la otra variable. Al realizar la sustitución, nos queda una ecuación lineal con una sola incógnita, que fácilmente se resuelve.

Ejemplos:

Resolver por el método de sustitución el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(E1)} & 5x - 8y = 22 \\
 \text{(E2)} & -3x + 4y = -14
 \end{array}$$

De la ecuación (E1) despejamos y , se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 & -8y = 22 - 5x \\
 \text{(E3)} & y = (22 - 5x) / -8
 \end{array}$$

Note que el coeficiente -8 pasa con su mismo signo.

Ahora, sustituyendo el *lado derecho* en lugar de y , en la otra ecuación (E2), se tiene:

$$\begin{array}{ll}
 \text{(E2)} & -3x + 4y = -14 \\
 & -3x + 4(22 - 5x) / -8 = -14
 \end{array}$$

Multiplicando toda esta ecuación por -8 , para quitarlo como denominador, queda:

$$\begin{array}{l}
 (-8) -3x + (-8) 4(22 - 5x) / -8 = (-8) (-14) \\
 24x + 4(22 - 5x) = 112 \\
 24x + 88 - 20x = 112 \\
 4x = 112 - 88 \\
 4x = 24
 \end{array}$$

$$x = 24 / 4 = 6$$

Ahora, sustituimos $x = 6$ en la ecuación despejada (E3), queda:

$$\begin{aligned} \text{(E3)} \quad y &= (22 - 5x) / -8 \\ y &= (22 - 5(6)) / -8 \\ y &= (22 - 30) / -8 \\ \mathbf{y} &= -8 / -8 = \mathbf{1} \end{aligned}$$

La solución es $x = 6$, $y = 1$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $(6, 1)$.

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad 5x - 8y &= 22 \\ \text{(E2)} \quad -3x + 4y &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad 5(6) - 8(1) &= 22 \\ \text{(E2)} \quad -3(6) + 4(1) &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad 30 - 8 &= 22 \\ \text{(E2)} \quad -18 + 4 &= -14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad 22 &= 22 \\ \text{(E2)} \quad -14 &= -14 \quad \text{Ok.} \end{aligned}$$

Resolver por el método de sustitución el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad -6x + 9y &= 0 \\ \text{(E2)} \quad 4x - 2y &= 2 \end{aligned}$$

De la ecuación (E1) despejamos y , se tiene:

$$\begin{aligned} 9y &= 0 + 6x \\ \text{(E3)} \quad y &= \mathbf{6x / 9} \end{aligned}$$

Ahora, sustituyendo el *lado derecho* en lugar de y , en la otra ecuación (E2), se tiene:

$$\begin{aligned} \text{(E2)} \quad 4x - 2y &= 2 \\ 4x - 2(6x/9) &= 2 \\ 4x - 12x/9 &= 2 \end{aligned}$$

Multiplicando por 9 TODA la ecuación para quitar el denominador 9, se tiene:

$$\begin{aligned}
 36x - 12x &= 18 \\
 24x &= 18 \\
 x &= 18 / 24 = \frac{3}{4}
 \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos $x = \frac{3}{4}$ en la ecuación despejada (E3), queda:

$$\begin{aligned}
 \text{(E3)} \quad y &= 6x / 9 \\
 y &= 6 \left(\frac{3}{4} \right) / 9 = 18 / 4 / 9 = 18 / 36 = \frac{1}{2} \\
 \mathbf{y} &= \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

La solución es $x = \frac{3}{4}$, $y = \frac{1}{2}$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $(\frac{3}{4}, \frac{1}{2})$.

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{aligned}
 \text{(E1)} \quad -6x + 9y &= 0 \\
 \text{(E2)} \quad 4x - 2y &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E1)} \quad -6\left(\frac{3}{4}\right) + 9\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\
 \text{(E2)} \quad 4\left(\frac{3}{4}\right) - 2\left(\frac{1}{2}\right) &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E1)} \quad -18/4 + 9/2 &= 0 \\
 \text{(E2)} \quad 12/4 - 2/2 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E1)} \quad -9/2 + 9/2 &= 0 \\
 \text{(E2)} \quad 3 - 1 &= 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(E1)} \quad 0 &= 0 \\
 \text{(E2)} \quad 2 &= 2 \quad \text{Ok.}
 \end{aligned}$$

EJERCICIO 33 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de sustitución:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \text{(E1)} \quad 8x - 2y &= 28 \\
 \text{(E2)} \quad -2x + 4y &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \text{(E1)} \quad 10x - 5y &= -30 \\
 \text{(E2)} \quad -4x + 6y &= 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad \text{(E1)} \quad 8x - 5y &= 9 \\
 \text{(E2)} \quad 7x + 3y &= 30
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} 4) & \begin{array}{l} \text{(E1)} \quad 9x + 2y = -68 \\ \text{(E2)} \quad 3x - 5y = 17 \end{array} \\ 5) & \begin{array}{l} \text{(E1)} \quad \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 4 \\ \text{(E2)} \quad -5x + 4y = -62 \end{array} \end{array}$$

3.25.3) MÉTODO DE IGUALACIÓN

Consiste en *despejar* la misma variable en las dos ecuaciones y después igualarlas entre sí, aplicando la propiedad reflexiva de las igualdades. Al realizar la igualación, nos quedará una ecuación lineal con la otra variable y será de una sola incógnita, que fácilmente se resuelve.

Ejemplos:

Resolver por el método de igualación el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{array}{ll} \text{(E1)} & x + y = 14 \\ \text{(E2)} & -12x + 6y = -24 \end{array}$$

De la ecuación (E1) despejamos x , se tiene:

$$\text{(E3)} \quad x = 14 - y$$

De la ecuación (E2) también despejamos x , se tiene:

$$\begin{aligned} -12x &= -24 - 6y \\ x &= (-24 - 6y) / -12 \quad \text{Note que el coeficiente pasa con su signo.} \end{aligned}$$

Dividiendo entre -12 en el lado derecho, queda:

$$\text{(E4)} \quad x = 2 + \frac{1}{2}y$$

Ahora, igualando las ecuaciones (E3) y (E4), en virtud de que $x = x$, se tiene:

$$\text{(E3)} \quad 14 - y = 2 + \frac{1}{2}y \quad \text{(E4)}$$

Multiplicando toda esta ecuación por 2, para quitarlo como denominador, queda:

$$\begin{aligned} 28 - 2y &= 4 + 2/2 y \\ 28 - 2y &= 4 + y \end{aligned}$$

Ahora transponiendo términos, el número al lado derecho y la incógnita al lado izquierdo, para lo cual les cambiamos su signo, queda:

$$\begin{aligned} -2y - y &= 4 - 28 \\ -3y &= -24 \\ y &= -24 / -3 \\ y &= 8 \end{aligned}$$

Ahora, sustituimos $y = 8$ en la ecuación despejada (E3), queda:

$$\begin{aligned} \text{(E3)} \quad x &= 14 - y \\ x &= 14 - 8 \\ x &= 6 \end{aligned}$$

La solución es $x = 6$, $y = 8$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $(6, 8)$.

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad x + y &= 14 \\ \text{(E2)} \quad -12x + 6y &= -24 \\ \text{(E1)} \quad 6 + 8 &= 14 \\ \text{(E2)} \quad -12(6) + 6(8) &= -24 \\ \text{(E1)} \quad 14 &= 14 \\ \text{(E2)} \quad -72 + 48 &= -24 \\ \text{(E1)} \quad 14 &= 14 \\ \text{(E2)} \quad -24 &= -24 \quad \text{Ok.} \end{aligned}$$

Resolver por el método de igualación el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \text{(E1)} \quad 4x + 8y &= -32 \\ \text{(E2)} \quad -2x + 6y &= -12 \end{aligned}$$

De la ecuación (E1) despejamos x , se tiene:

$$\begin{aligned} 4x &= -32 - 8y \\ x &= (-32 - 8y)/4 \end{aligned}$$

Dividiendo el lado derecho entre 4, se tiene:

$$\text{(E3)} \quad x = -8 - 2y$$

De la ecuación (E2) también despejamos x , se tiene:

$$-2x = -12 - 6y$$

$$x = (-12 - 6y) / -2 \quad \text{Note que el coeficiente pasa con su signo.}$$

Dividiendo entre -2 en el lado derecho, queda:

$$(E4) \quad x = 6 + 3y$$

Ahora, igualando las ecuaciones (E3) y (E4), en virtud de que $x = x$, se tiene:

$$(E3) \quad -8 - 2y = 6 + 3y \quad (E4)$$

Ahora transponiendo términos, el número al lado derecho y la incógnita al lado izquierdo, para lo cual les cambiamos su signo, queda:

$$-2y - 3y = 6 + 8$$

$$-5y = 14$$

$$y = 14 / -5$$

$$y = -14/5$$

Ahora, sustituimos $y = -14/5$ en la ecuación despejada (E3), queda:

$$(E3) \quad x = -8 - 2y$$

$$x = -8 - 2(-14/5)$$

$$x = -8 + 28/5 = -40/5 + 28/5 = -12/5$$

La solución es $x = -12/5$, $y = -14/5$, lo que representa el punto de intersección de las dos rectas, es decir, $(-12/5, -14/5)$.

La solución hallada satisface a ambas ecuaciones, o sea:

$$(E1) \quad 4x + 8y = -32$$

$$(E2) \quad -2x + 6y = -12$$

$$(E1) \quad 4(-12/5) + 8(-14/5) = -32$$

$$(E2) \quad -2(-12/5) + 6(-14/5) = -12$$

$$(E1) \quad -48/5 - 112/5 = -32$$

$$(E2) \quad 24/5 - 84/5 = -12$$

$$(E1) \quad -160/5 = -32$$

$$(E2) \quad -60/5 = -12$$

$$(E1) \quad -32 = -32$$

$$(E2) \quad -12 = -12 \quad \text{Ok.}$$

EJERCICIO 34 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de igualación:

- 1) (E1) $8x - 2y = 6$
(E2) $-2x + 4y = -2$
- 2) (E1) $10x - 5y = -5$
(E2) $-4x + 6y = 34$
- 3) (E1) $8x - 5y = 17$
(E2) $7x + 3y = -19$
- 4) (E1) $9x + 2y = 75$
(E2) $3x - 5y = 11$
- 5) (E1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = 0$
(E2) $-5x + 4y = -2$

UNIDAD XXIV

3.25.4) MÉTODO DE DETERMINANTES (REGLA DE CRAMER)

Es un método numérico utilizado para resolver sistemas de ecuaciones simultáneas de dos o más incógnitas.

A medida que el número de incógnitas se hace muy grande, los métodos de reducción, sustitución e igualación, son más difíciles de aplicar, en cambio el método de determinantes es más conveniente y en virtud de ser un método numérico, es adecuado para programarse en una computadora. De hecho los sistemas de ecuaciones de más de 5 incógnitas se resuelven utilizando computadora.

En virtud de que en Éste método sólo se realizan operaciones aritméticas, he comprobado que para los estudiantes es su favorito, ya que se evitan las operaciones de reducir, sustituir o igualar, que en algunos casos son muy útiles, pero en otros lo importante es resolver correctamente el sistema de ecuaciones, sin importar que método se utilice.

Un **determinante** es un arreglo de elementos ordenados en filas y columnas. Si el determinante se compone de 2 renglones(horizontales) y dos columnas (verticales), entonces se le denomina *determinante de segundo orden* o *determinante de orden dos*.

El valor del determinante se obtiene multiplicando cruzado hacia abajo y hacia arriba, tomando en cuenta, que el producto hacia arriba se considera negativo, esto es:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Por ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (5)(-2) - (3)(-4) = -10 - (-12) = -10 + 12 = 2$$

Para resolver un sistema de ecuaciones simultáneas con dos incógnitas por el método de determinantes, se siguen los pasos siguientes:

Se arreglan por columnas las incógnitas. De la forma siguiente:

$$\begin{aligned} ax + by &= c \\ dx + ey &= f \end{aligned}$$

x, y son las *incógnitas*; **a, b, d, e** son los *coeficientes* de x e y; **c, f** son los *términos independientes*.

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - db$$

Se le llama discriminante, ya que nos permite saber si el sistema de ecuaciones tiene solución. Si el valor de Δ (**Delta**) **es igual a cero**, el proceso se detiene ya que el sistema no tiene una solución única. Si es **diferente de cero**, positivo o negativo, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δ_x (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes.

Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \pi & y \\ c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - fb$$

El valor para la solución x , está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta}$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y , Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y , por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & \pi \\ a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - dc$$

El valor para la solución y , está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta}$$

Nota que al calcular Δx y Δy , se sustituyen los términos independientes por la columna de la incógnita que busquemos.

Ejemplos:

Utilizando el método de determinantes resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$3y - 5x = -50$$

$$2x - 4y = 6$$

Se arreglan por columnas las incógnitas, primero la de x y luego la de y . De la forma siguiente:

$$-5x + 3y = -50$$

$$2x - 4y = 6$$

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y .**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ -5 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = (-5)(-4) - (2)(3) = 20 - 6 = 14$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δx (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \pi & y \\ -50 & 3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix} = (-50)(-4) - (6)(3) = 200 - 18 = 182$$

El valor para la solución x, está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{182}{14} = 13$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y, Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & \pi \\ -5 & -50 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = (-5)(6) - (2)(-50) = -30 - (-100) = -30 + 100 = 70$$

El valor para la solución y, está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{70}{14} = 5$$

La solución hallada es **x = 13** e **y = 5** y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{aligned} -5x + 3y &= -50 \\ 2x - 4y &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -5(13) + 3(5) &= -50 \\ 2(13) - 4(5) &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -65 + 15 &= -50 \\ -20 &= 6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -50 &= -50 \\ 6 &= 6 \end{aligned} \quad \text{Ok.}$$

Utilizando el método de determinantes resolver el sistema de ecuaciones simultáneas siguiente:

$$\begin{aligned} 3x + 7y - 58 &= 0 \\ -2x &= 50 - 8y \end{aligned}$$

Pasando los términos independientes al lado derecho del igual y las incógnitas al lado izquierdo y arreglando por columnas las incógnitas, primero la de x y luego la de y. Queda:

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 58 \\ -2x + 8y &= 50 \end{aligned}$$

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ 3 & 7 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = (3)(8) - (-2)(7) = 24 - (-14) = 24 + 14 = 38$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δ_x (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \pi & y \\ 58 & 7 \\ 50 & 8 \end{vmatrix} = (58)(8) - (50)(7) = 464 - 350 = 114$$

El valor para la solución x , está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{114}{38} = 3$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y , Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y , por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & \pi \\ 3 & 58 \\ -2 & 50 \end{vmatrix} = (3)(50) - (-2)(58) = 150 - (-116) = 150 + 116 = 266$$

El valor para la solución y , está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{266}{38} = 7$$

La solución hallada es $x = 3$ e $y = 7$ y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

$$\begin{aligned} 3x + 7y &= 58 \\ -2x + 8y &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3(3) + 7(7) &= 58 \\ -2(3) + 8(7) &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 9 + 49 &= 58 \\ -6 + 56 &= 50 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 58 &= 58 \\ 50 &= 50 \end{aligned}$$

Ok.

EJERCICIO 35 Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones usando el método de determinantes:

- 1) (E1) $7x - 3y = -3$
(E2) $-4x + 5y = 28$
- 2) (E1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = \frac{3}{2}$
(E2) $-\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y = -\frac{3}{2}$
- 3) (E1) $9x - 4y = -10$
(E2) $6x - 2y = -8$
- 4) (E1) $5x + 8y = 12$
(E2) $4x - 7y = -44$
- 5) (E1) $\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}y = \frac{9}{2}$
(E2) $-8x + 2y = -64$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRACTICA DE LOS SISTEMAS DE ECUACIONES SIMULTANEAS LINEALES

1) Hallar dos números, sabiendo que si uno de ellos se suma con el doble de otro se obtiene 21 y que si este ultimo se suma con el doble del primero resulta 18.

Solución:

x = primer número
 y = segundo número

primero + el doble del segundo = 21
el segundo + el doble del primero = 18

El sistema de ecuaciones que se forma es:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 21 \\ y + 2x &= 18\end{aligned}$$

Ordenando el sistema, se obtiene:

$$\begin{aligned}x + 2y &= 21 \\ 2x + y &= 18\end{aligned}$$

Resolviendo por el método de determinantes, se tiene:

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y .**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (1)(1) - (2)(2) = 1 - 4 = -3$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δx (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} \pi & y \\ 21 & 2 \\ 18 & 1 \end{vmatrix} = (21)(1) - (18)(2) = 21 - 36 = -15$$

El valor para la solución x, está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-15}{-3} = 5$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y, Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y, por la columna de los términos independientes.

Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & \pi \\ 1 & 21 \\ 2 & 18 \end{vmatrix} = (1)(18) - (2)(21) = 18 - 42 = -24$$

El valor para la solución y, está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-24}{-3} = 8$$

La solución hallada es **x = 5** e **y = 8** y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

Neftalí Antúnez H.

$$x + 2y = 21$$

$$2x + y = 18$$

$$5 + 2(8) = 21$$

$$2(5) + 8 = 18$$

$$5 + 16 = 21$$

$$10 + 8 = 18$$

$$21 = 21$$

$$18 = 18 \quad \text{Ok.}$$

2) Kevin Daniel compró en la tienda Salpinx® un pantalón y una camisa por la cantidad de \$ 364 pesos. Sabiendo que el doble del costo de la camisa más 40 pesos es igual al costo del pantalón ¿Cuánto costo cada cosa?

Solución:

x = costo de la camisa

y = costo del pantalón

Las condiciones son:

$$\text{Costo de la camisa} + \text{costo del pantalón} = \$ 364$$

$$\text{El doble del costo de la camisa} + \$ 40 = \text{costo del pantalón}$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que se forma es:

$$x + y = 364$$

$$2x + 40 = y$$

Ordenando el sistema, se obtiene:

$$x + y = 364$$

$$2x - y = -40$$

Resolviendo por el método de determinantes, se tiene:

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y .**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (2)(1) = -1 - 2 = -3$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δx (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} TI & y \\ 364 & 1 \\ -40 & -1 \end{vmatrix} = (364)(-1) - (-40)(1) = -364 + 40 = -324$$

El valor para la solución x, está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-324}{-3} = 108$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y, Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & TI \\ 1 & 364 \\ 2 & -40 \end{vmatrix} = (1)(-40) - (2)(364) = -40 - 728 = -768$$

El valor para la solución y, está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-768}{-3} = 256$$

La solución hallada es **x = 108** e **y = 256** y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

$$x + y = 364$$

$$2x - y = -40$$

$$108 + 256 = 364$$

$$2(108) - 256 = -40$$

$$364 = 364$$

$$-40 = -40 \quad \text{Ok.}$$

3) Irving Alexis trabaja por las tardes en una tienda como vendedor y recibe un salario semanal más una comisión, que es un porcentaje de las ventas. Una semana, por ventas de \$ 3000 pesos, su pago total fue \$ 760 pesos. La

semana siguiente por ventas de \$ 4000 pesos, su pago total fue de \$ 880 pesos. Calcular su salario semanal y el porcentaje de comisión.

Solución:

x = salario semanal

y = porcentaje de comisión

salario semanal + porcentaje de comisión de \$ 3000 = \$ 760

salario semanal + porcentaje de comisión de \$ 4000 = \$ 880

El sistema de ecuaciones que se forma es:

$$x + 3000y = 760$$

$$x + 4000y = 880$$

Resolviendo por el método de determinantes, se tiene:

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y .**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 3000 \\ 1 & 4000 \end{vmatrix} = (1)(4000) - (1)(3000) = 4000 - 3000 = 1000$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x , Δx (Delta x), sustituyendo la columna de las x , por la columna de los términos independientes.

Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} TI & y \\ 760 & 3000 \\ 880 & 4000 \end{vmatrix} = (760)(4000) - (880)(3000)$$

$$\Delta x = 3040000 - 2640000 = 400000$$

El valor para la solución x , está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{400000}{1000} = 400$$

ÁLGEBRA

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y , Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y , por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 760 \\ 1 & 880 \end{vmatrix} = (1)(880) - (1)(760) = 880 - 760 = 120$$

El valor para la solución y , está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{120}{1000} = 0.12$$

Es decir, su porcentaje de comisión es del 12 % ($0.12 \times 100 = 12$).

La solución hallada es $x = 400$ e $y = 0.12$ y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

$$x + 3000y = 760$$

$$x + 4000y = 880$$

$$400 + 3000(0.12) = 760$$

$$400 + 4000(0.12) = 880$$

$$760 = 760$$

$$880 = 880 \quad \text{Ok.}$$

4) En la bahía de Acapulco, una lancha de motor viaja a 60 kilómetros por hora (kph) con la corriente a favor y a 48 kilómetros por hora contra la corriente. Determine la corriente y la velocidad de la lancha en agua tranquila.

Solución:

x = velocidad de la lancha en agua tranquila

y = corriente

Las condiciones son:

Velocidad de la lancha con la corriente a favor = 60

Velocidad de la lancha con la corriente en contra = 48

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones que se forma es:

$$x + y = 60$$

$$x - y = 48$$

Resolviendo por el método de determinantes, se tiene:

Se calcula el valor del determinante, llamado *discriminante* Δ (Delta), **formado por los coeficientes de las incógnitas x e y.**

$$\Delta = \begin{vmatrix} x & y \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = (1)(-1) - (1)(1) = -1 - 1 = -2$$

Como Δ (**Delta**) es **diferente de cero**, entonces el sistema si tiene una solución única.

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante x, Δx (Delta x), sustituyendo la columna de las x, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta x = \begin{vmatrix} TI & y \\ 60 & 1 \\ 48 & -1 \end{vmatrix} = (60)(-1) - (48)(1) = -60 - 48 = -108$$

El valor para la solución x, está dado por :

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{-108}{-2} = 54$$

Se calcula el valor del determinante, llamado discriminante y, Δy (Delta y), sustituyendo la columna de las y, por la columna de los términos independientes. Esto es:

$$\Delta y = \begin{vmatrix} x & TI \\ 1 & 60 \\ 1 & 48 \end{vmatrix} = (1)(48) - (1)(60) = 48 - 60 = -12$$

El valor para la solución y, está dado por :

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-12}{-2} = 6$$

La solución hallada es **x = 54 KPH** e **y = 6 KPH** y se cumple en ambas ecuaciones, o sea:

$$x + y = 60$$

$$x - y = 48$$

$$\begin{array}{rcl} 54 & + & 6 = 60 \\ 54 & - & 6 = 48 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 60 = 60 \\ 48 = 48 \end{array}$$

Ok.

EJERCICIO 36 Resolver los siguientes problemas de aplicación práctica usando sistemas de ecuaciones con 2 incógnitas:

1. Se tienen \$ 11.30 pesos en 78 monedas de a 20 centavos y 10 centavos ¿Cuántas monedas son de 10 centavos y cuántas son de 20 centavos?
2. Diana Lizzete tiene \$ 404 pesos en 91 monedas de a \$5 pesos y de \$4 pesos ¿Cuántas monedas son de \$ 5 pesos y cuántas son de \$4 pesos?
3. En un cine hay 700 personas entre adultos y niños. Cada adulto pago 40 centavos y cada niño 15 centavos por su entrada. La recaudación por concepto de entradas es de \$ 180 pesos ¿Cuántos adultos y cuántos niños hay en el cine?
4. Se reparten monedas de 20 centavos y de 25 centavos entre 44 personas, dándole una moneda a cada una. Si la cantidad repartida es de \$9.95 pesos, ¿Cuántas personas recibieron monedas de 20 centavos y cuántas de 25 centavos?
5. Se tienen \$ 419 pesos en 287 billetes de a \$1 pesos y de a \$2 pesos. ¿Cuántos billetes son de a \$1 pesos y cuántos son de a \$2 pesos?
6. Con 174 dólares compré 34 libros de a \$3 dólares y de a \$ 7 dólares. ¿Cuántos libros compré de cada precio?
7. Un comerciante empleó \$ 6720 dólares en comprar trajes de a \$ 375 dólares y sombreros de a \$ 45 dólares. Si la suma de trajes y sombreros comprados es de 54, ¿Cuántos trajes compró y cuántos sombreros?
8. La diferencia de dos números es 40 y $\frac{1}{8}$ de su suma es 11. Hallar los números.
9. La suma de dos números es 1529 y su diferencia es 101. Hallar los números.
10. Los $\frac{2}{3}$ de la suma de dos números es 74 y los $\frac{3}{5}$ de su diferencia es 9. Hallar los números.
11. 5 trajes y 3 sombreros cuestan \$ 4180 pesos, y 8 trajes y 9 sombreros cuestan \$ 6940 pesos. Hallar el precio de un traje y de un sombrero.
12. Paola Kattyana compró 4 vacas y 7 caballos por \$ 514 dólares y, más tarde a los mismos precios, compró 8 vacas y 9 caballos por \$ 818 dólares. Hallar el costo de una vaca y de un caballo.
13. En un cine, 10 entradas de adulto y 9 de niño cuestan \$ 5.12 dólares, y 17 de niño y 15 de adulto cuestan \$ 8.31 dólares. Hallar el precio de una entrada de niño y una de adulto.

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

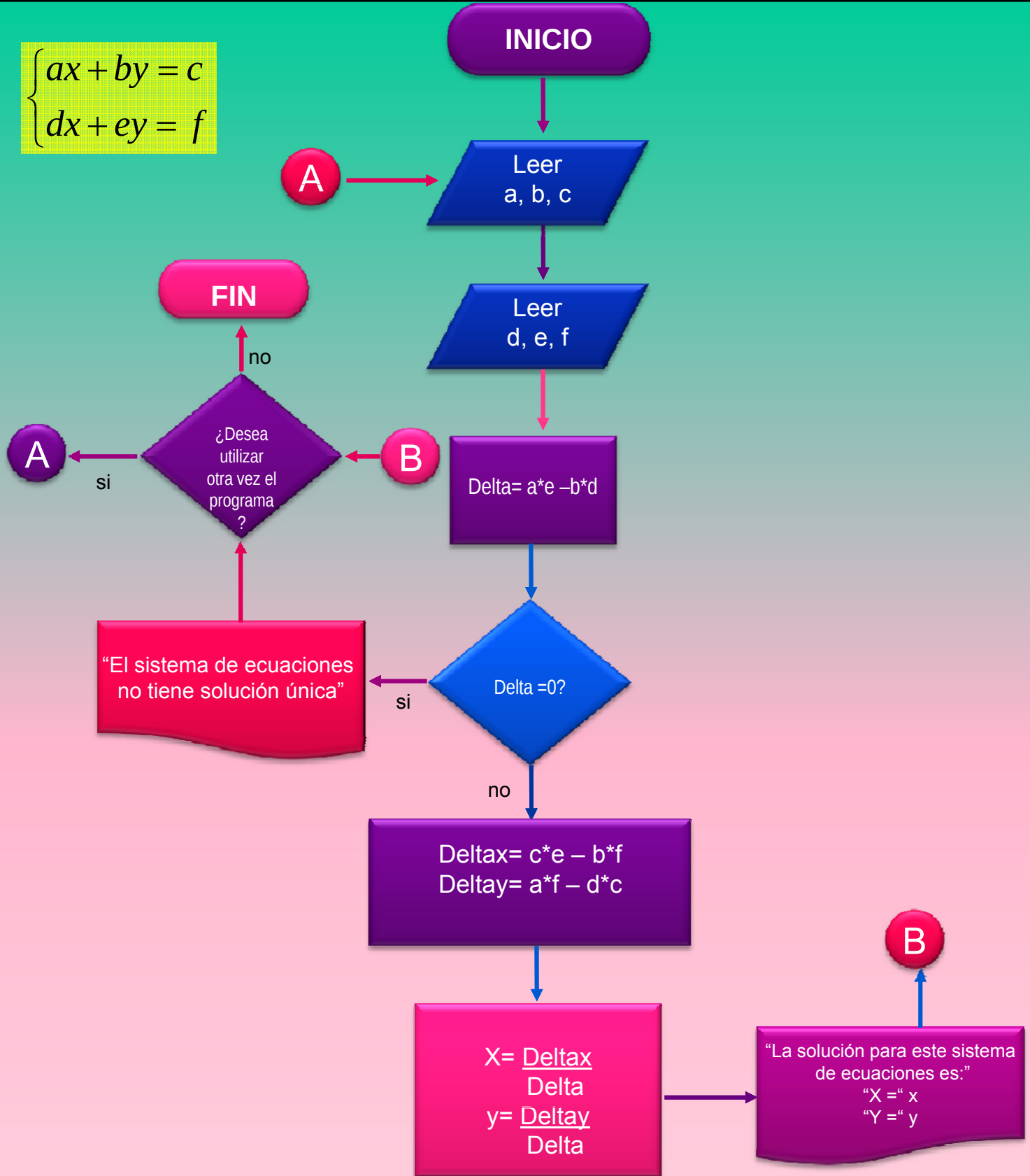
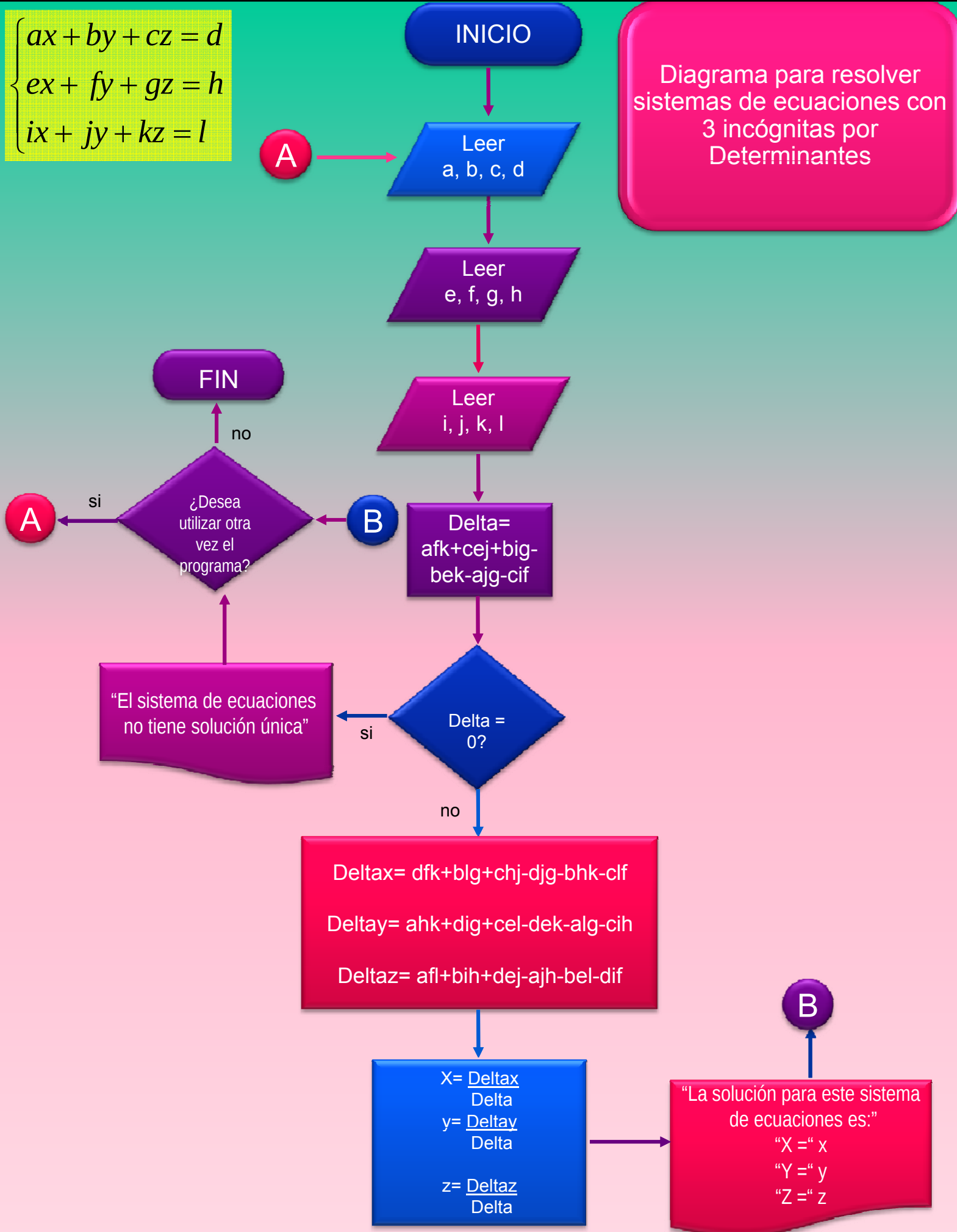


Diagrama para resolver
sistemas de ecuaciones con 2
incógnitas por Determinantes



14. Si a 5 veces el mayor de dos números se añade 7 veces el menor, la suma es 316, y si a 9 veces el menor se resta el cuádruplo del mayor, la diferencia es 83. Hallar los números.
15. Los $\frac{3}{7}$ de la edad de A aumentados en los $\frac{3}{8}$ de la edad de B suman 15 años, y los $\frac{2}{3}$ de la edad de A disminuidos en los $\frac{3}{4}$ de la edad de B equivalen a 2 años. Hallar ambas edades.
16. Un hombre rema río abajo 10 Km. en una hora y río arriba a 4 Km. en una hora. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
17. Una tripulación rema 28 Km. en $1\frac{3}{4}$ horas río abajo y 24 Km. en tres horas río arriba. Hallar la velocidad del bote en agua tranquila y la velocidad del río.
18. Si A le da a B \$1 peso, ambos tienen lo mismo, y si B le da a A \$1 peso, A tendrá el triple de lo que le quede a B. ¿Cuánto tiene cada uno?
19. Hace 10 años la edad de A era el doble que la de B; dentro de 10 años la edad de B será los $\frac{3}{4}$ de la de A. Hallar las edades actuales.

UNIDAD XXV

2.26) ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

La ecuación general de segundo grado tiene la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{siendo } a \neq 0$$

Donde **a** es el coeficiente de x^2 , **b** el coeficiente de x y **c** el término independiente.

De acuerdo al **Teorema Fundamental del Álgebra**, que expresa que "Toda ecuación de grado n , tiene n raíces, ya sea reales o complejas", la ecuación de segundo grado **tendrá dos raíces**.

La **raíz** es una solución de una ecuación y se les llama así a partir de la ecuación de segundo grado o mayor.

El tipo de raíces nos lo indica el discriminante Δ de la ecuación. Esto es:

$$\Delta = \sqrt{b^2 - 4ac}$$

Sí $b^2 - 4ac > 0$ las raíces son reales y distintas

Sí $b^2 - 4ac = 0$ las raíces son reales e iguales

Sí $b^2 - 4ac < 0$ las raíces son complejas y conjugadas

En nuestro estudio, obtendremos las raíces sólo en los dos primeros casos, es decir, cuando sean reales, ya sean iguales o distintas. Si el radicando es negativo, entonces las raíces no existen en los números reales, sino que caen en el campo de los números complejos, que se estudian en matemáticas superiores.

Si denotamos por las raíces de la ecuación de segundo grado a: x_1 y x_2 , entonces podemos factorizar la ecuación de segundo grado de la forma:

$$(x - x_1) (x - x_2) = 0$$

Note que el 1 y 2, que aparecen están colocados en la parte inferior de la letra y a esto se les llama **subíndices**, que únicamente nos indican orden o posición y son distintos de los exponentes, a los cuales también se les llama superíndices.

Para resolver una ecuación de segundo grado existen varios métodos, algunos de los cuales se vieron en el tema de factorización, así que solo utilizaremos el método de completar el trinomio cuadrado perfecto y el de la fórmula general, que en la práctica son los más utilizados.

2.26.1) SOLUCIÓN POR COMPLETAR EL TRINOMIO CUADRADO PERFECTO (TCP)

Para ser un trinomio cuadrado perfecto (TCP), el primero y último términos deben ser cuadrados de alguna expresión y el término medio debe ser el doble producto de las raíces cuadradas del primero y el último término. El trinomio cuadrado perfecto es igual entonces al cuadrado de un binomio.

Por ejemplo:

Si la ecuación de segundo grado es: $x^2 + 6x + 9 = 0$,

Entonces, se tiene un TCP, ya que se cumple con sus propiedades. Esto es:

$$(x)^2 + 2 (3) x + (3)^2 = 0$$

Por lo tanto:

$$(x + 3)^2 = 0$$

Es decir,

$$(x + 3) (x + 3) = 0$$

Lo anterior significa que sus raíces son: $x_1 = -3$ y $x_2 = -3$, es decir, son reales e iguales. Note que las raíces se toman con signo contrario, ya que al estar factorizadas, para que se cumpla la igualdad es necesario que cualquiera de los factores sea cero, es decir:

$$x + 3 = 0$$

Por lo tanto: $x = -3$

Cuando el trinomio cuadrado perfecto (TCP) no está completo, es necesario completarlo, para lo cual seguimos el procedimiento siguiente:

- Si el coeficiente de x^2 es diferente de 1, dividimos toda la ecuación entre éste coeficiente.
- Pasamos el término independiente con signo cambiado al lado derecho del igual.
- A ambos lados de la igualdad les agregamos el cuadrado de la mitad del coeficiente de x .
- El primer lado de la igualdad se convierte en un trinomio cuadrado perfecto, que será expresado como el cuadrado de un binomio.
- Reducimos términos en el lado derecho del igual hasta obtener un sólo valor.
- Extraemos raíz cuadrada a ambos lados de la igualdad.
- Despejamos x y obtenemos las dos raíces, la primera tomando el signo $+$ del radical y la segunda tomando el signo $-$.

Ejemplos:

Resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

Como el coeficiente de x^2 es 2, dividimos toda la ecuación entre 2:

$$2/2 x^2 - 8/2 x + 6/2 = 0/2$$

Queda: $x^2 - 4x + 3 = 0$

Pasamos el término independiente $+3$ con signo contrario al segundo miembro:

$$x^2 - 4x = -3$$

Ahora sumamos a ambos lados de la igualdad, la mitad del coeficiente de x (-4) al cuadrado. Esto es:

$$x^2 - 4x + (-4/2)^2 = -3 + (-4/2)^2$$

$$x^2 - 4x + (-2)^2 = -3 + (-2)^2$$

$$x^2 - 4x + 4 = -3 + 4$$

El primer lado de la igualdad se convierte en un trinomio cuadrado perfecto (TCP), que será expresado como el cuadrado de un binomio y reduciendo términos en el lado derecho del igual, queda:

$$(x - 2)^2 = 1$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, se tiene:

$$(x - 2) = \pm\sqrt{1}$$

$$(x - 2) = \pm 1$$

Despejando x, queda: $x = 2 \pm 1$

Tomando el signo +: $x_1 = 2 + 1 = 3$

Tomando el signo -: $x_2 = 2 - 1 = 1$

Es decir, sus raíces son: $x_1 = 3$ y $x_2 = 1$. Por tanto, la solución puede expresarse como:

$$(x - 3)(x - 1) = 0$$

Nota que cuando escribimos las raíces como factores, éstas se escriben con signo contrario.

Comprobación: sustituyendo en la ecuación original, el valor de las raíces halladas, se tiene:

Para $x_1 = 3$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$2(3)^2 - 8(3) + 6 = 0$$

$$2(9) - 24 + 6 = 0$$

$$18 - 24 + 6 = 0$$

$$24 - 24 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Ok.}$$

Para $x_2 = 1$

$$2x^2 - 8x + 6 = 0$$

$$2(1)^2 - 8(1) + 6 = 0$$

$$2(1) - 8 + 6 = 0$$

$$2 - 8 + 6 = 0$$

$$8 - 8 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Ok.}$$

Resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3x^2 - 11x - 27 = 0$$

Como el coeficiente de x^2 es 3, dividimos toda la ecuación entre 3:

$$3/3 x^2 - 11/3 x - 27/3 = 0/3$$

Queda:
$$x^2 - 11/3 x - 9 = 0$$

Pasamos el término independiente -9 con signo contrario al segundo miembro:

$$x^2 - 11/3 x = 9$$

Ahora sumamos a ambos miembros, la mitad del coeficiente de x ($-11/3$) al cuadrado. Esto es:

$$x^2 - 11/3 x + (-11/3/2)^2 = 9 + (-11/3/2)^2$$

$$x^2 - 11/3 x + (-11/6)^2 = 9 + (-11/6)^2$$

$$x^2 - 11/3 x + 121/36 = 9 + 121/36$$

El primer miembro se convierte en un trinomio cuadrado perfecto, que será expresado como el cuadrado de un binomio y reduciendo términos en el lado derecho del igual, queda:

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{9 \times 36 + 121}{36} = \frac{324 + 121}{36} = \frac{445}{36}$$

$$\left(x - \frac{11}{6}\right)^2 = \frac{445}{36}$$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros :

$$x - \frac{11}{6} = \pm \sqrt{\frac{445}{36}} = \pm \frac{\sqrt{445}}{\sqrt{36}} = \pm \frac{\sqrt{445}}{6}$$

$$x - \frac{11}{6} = \pm \frac{\sqrt{445}}{6}$$

Despejando x :

$$x_1 = \frac{11}{6} + \frac{\sqrt{445}}{6} = \frac{11 + \sqrt{445}}{6} = 5.34917$$

$$x_2 = \frac{11}{6} - \frac{\sqrt{445}}{6} = \frac{11 - \sqrt{445}}{6} = -1.682503$$

Es decir, sus raíces son: $x_1 = 5.34917$ y $x_2 = -1.682503$. Por tanto, la solución puede expresarse como:

$$(x - 5.34917)(x + 1.682503) = 0$$

Nota que cuando escribimos las raíces como factores, éstas se escriben con signo contrario.

Comprobación: sustituyendo en la ecuación original, el valor de las raíces halladas, se tiene:

Para $x_1 = 5.34917$

$$3x^2 - 11x - 27 = 0$$

$$3(5.34917)^2 - 11(5.34917) - 27 = 0$$

$$3(28.6136196889) - 58.84087 - 27 = 0$$

$$85.8408590667 - 85.84087 = 0$$

$$-0.0000109333 \approx 0 \text{ Ok.}$$

Para $x_2 = -1.682503$

$$3x^2 - 11x - 27 = 0$$

$$3(-1.682503)^2 - 11(-1.682503) - 27 = 0$$

$$3(2.830816345009) + 18.507533 - 27 = 0$$

$$8.492449035027 + 18.507533 - 27 = 0$$

$$26.999982035027 - 27 = 0$$

$$-0.000017964973 \approx 0 \text{ Ok.}$$

2.26.2) SOLUCIÓN POR LA FORMULA GENERAL

La fórmula general es un método numérico simplificado y por lo tal, es adecuado para programarse en una computadora y es más fácil de utilizar.

La fórmula general para resolver una ecuación de segundo grado se obtiene completando el trinomio cuadrado perfecto a partir de la ecuación general de segundo grado, de ahí su nombre de fórmula general.

A continuación se deduce la fórmula general de la ecuación de segundo grado:

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \text{con } a \neq 0$$

Como a no puede ser 0, dividiendo toda la ecuación entre a :

$$a/a x^2 + b/a x + c/a = 0$$

Queda:
$$x^2 + b/a x + c/a = 0$$

Pasando el término independiente al otro miembro:

$$x^2 + b/a x = -c/a$$

Sumando a ambos miembros el cuadrado de la mitad del coeficiente de x (b/a), se tiene:

$$x^2 + b/a x + (b/2a)^2 = -c/a + (b/2a)^2$$

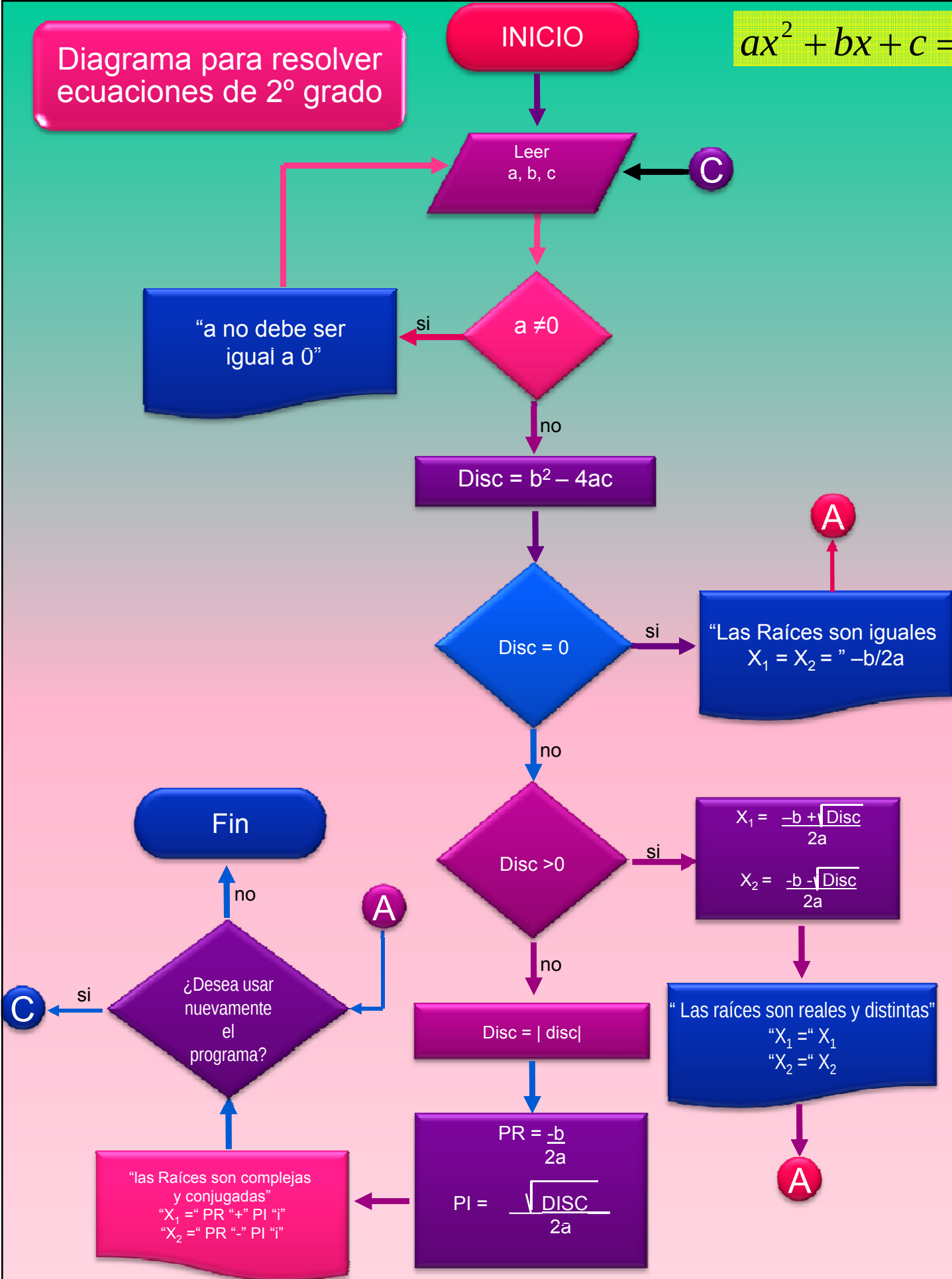
$$x^2 + b/a x + b^2/4a^2 = -c/a + b^2/4a^2$$

El primer lado de la igualdad se convierte en un trinomio cuadrado perfecto, que será expresado como el cuadrado de un binomio con las raíces de sus extremos x^2 y $b^2/4a^2$, cuyas raíces respectivamente son: x y $b/2a$. Reduciendo términos en el lado derecho del igual, queda:

Diagrama para resolver ecuaciones de 2º grado

INICIO

$$ax^2 + bx + c = 0$$



$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-12) \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(3)(-7)}}{2(3)}$$

$$x = \frac{12 \pm \sqrt{144 + 84}}{6} = \frac{12 \pm \sqrt{228}}{6} = \frac{12 \pm 15.09967}{6}$$

$$x_1 = \frac{12 + 15.09967}{6} = \frac{27.09967}{6} = 4.51661$$

$$x_2 = \frac{12 - 15.09967}{6} = \frac{-3.09967}{6} = -0.51661$$

Es decir, las raíces para esta ecuación son: $x_1 = 4.51661$ y $x_2 = -0.51661$

Resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$-5x^2 + 8x - 3 = 0$$

En este caso, $a = -5$, $b = 8$ y $c = -3$. Nota que se toman los signos que tienen los coeficientes.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(8) \pm \sqrt{(8)^2 - 4(-5)(-3)}}{2(-5)}$$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 60}}{-10} = \frac{-8 \pm \sqrt{4}}{-10} = \frac{-8 \pm 2}{-10}$$

$$x_1 = \frac{-8 + 2}{-10} = \frac{-6}{-10} = \frac{3}{5} = 0.6$$

$$x_2 = \frac{-8 - 2}{-10} = \frac{-10}{-10} = 1$$

Es decir, las raíces para esta ecuación son: $x_1 = 0.6$ y $x_2 = 1$

2.26.3) ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO INCOMPLETAS

Se les llama así a aquellas ecuaciones de segundo grado que les hace falta ya sea el término lineal o el término independiente. Se pueden resolver con la

Fórmula General, pero son más fáciles de resolver de la forma mostrada y el método de solución se ilustra con los casos siguientes:

ECUACIÓN INCOMPLETA SIN TÉRMINO INDEPENDIENTE

Su forma general es: $ax^2 + bx = 0$

Factorizando x, queda: $x(ax + b) = 0$

Por lo tanto, la igualdad se cumple si cualquiera de los dos factores es cero, esto es:

$$\text{Sí } x = 0$$

$$\text{y sí } ax + b = 0,$$

Despejando x de ésta última ecuación, queda:

$$ax = -b, \quad x = -b/a$$

Es decir, las raíces para esta ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -b/a$

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación $4x^2 + 6x = 0$

En este caso, $a = 4$, $b = 6$.

Es decir, las raíces para esta ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -6/4 = -3/2$

Comprobación para $x_2 = -3/2$

$$4(-3/2)^2 + 6(-3/2) = 0$$

$$4(9/4) - 18/2 = 0$$

$$9 - 9 = 0$$

$$0 = 0 \text{ Ok.}$$

2.- Resolver la ecuación $3x^2 - 10x = 0$

En este caso, $a = 3$, $b = -10$.

Es decir, las raíces para esta ecuación son: $x_1 = 0$ y $x_2 = -(-10)/3 = 10/3$

Comprobación para $x_2 = 10/3$

$$3(10/3)^2 - 10(10/3) = 0$$

$$3(100/9) - 100/3 = 0$$

$$300/9 - 100/3 = 0$$

$$100/3 - 100/3 = 0$$

$$0 = 0 \quad \text{Ok.}$$

ECUACIÓN INCOMPLETA SIN TÉRMINO LINEAL

Su forma general es: $ax^2 + c = 0$

Pasando el término independiente c al otro miembro, queda:

$$ax^2 = -c$$

Despejando x^2 : $x^2 = -c/a$

Extrayendo raíz cuadrada a ambos miembros, queda:

$$x = \pm \sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Para que el sistema tenga solución, es necesario que a y c sean de signos contrarios.

Es decir, las raíces para esta ecuación son :

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Ejemplos:

Resolver la ecuación $4x^2 - 9 = 0$

En este caso $a = 4$ y $c = -9$

Es decir, las raíces para esta ecuación son :

$$x_1 = +\sqrt{-\frac{(-9)}{4}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = -\sqrt{-\frac{(-9)}{4}} = -\frac{\sqrt{9}}{\sqrt{4}} = -\frac{3}{2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Sacando en el lado derecho como común denominador a $4a^2$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{-4ac + b^2}{4a^2} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Extrayendo raíz a ambos lados de la igualdad :

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{\sqrt{4a^2}} = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Queda :

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right) = \frac{\pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Finalmente, despejando x :

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{como se tiene el mismo denominador } 2a,$$

Queda :

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{Que es la famosa Fórmula General para}$$

resolver la ecuación de segundo grado.

Para aplicar la fórmula general sólo se necesita saber el valor de los coeficientes a, b, y c, después sustituimos sus valores y realizamos las operaciones indicadas, hasta hallar las dos raíces, una tomando el radical con signo + y la otra con el signo -. Si nos resulta que el valor dentro del radical es negativo, detenemos el proceso porque la solución cae en el campo de los números complejos y no de los números reales.

Ejemplos:

Resolver la ecuación de segundo grado siguiente:

$$3x^2 - 12x - 7 = 0$$

En este caso, $a = 3$, $b = -12$ y $c = -7$. Nota que se toman los signos que tienen los coeficientes.

Comprobación para $x_2 = -3/2$

$$\begin{aligned} 4(-3/2)^2 - 9 &= 0 \\ 4(9/4) - 9 &= 0 \\ 9 - 9 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ Ok.} \end{aligned}$$

Resolver la ecuación $x^2 - 25 = 0$

En este caso $a = 1$ y $c = -25$

Es decir, las raíces para esta ecuación son :

$$\begin{aligned} x_1 &= +\sqrt{-\frac{(-25)}{1}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{1}} = 5 \\ x_2 &= -\sqrt{-\frac{(-25)}{1}} = -\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{1}} = -5 \end{aligned}$$

Comprobación para $x_2 = -5$

$$\begin{aligned} x^2 - 25 &= 0 \\ (-5)^2 - 25 &= 0 \\ 25 - 25 &= 0 \\ 0 &= 0 \text{ Ok.} \end{aligned}$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN PRÁCTICA DE LA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

1.- Hallar un número sabiendo que es igual al doble de su raíz cuadrada más 3.

Solución: La condición del problema algebraicamente se representa por :
 $x = 2\sqrt{x} + 3$

Ahora pasando con signo contrario el 3 al primer lado de la igualdad y después elevando al cuadrado ambos miembros, queda:

$$\begin{aligned} (x - 3)^2 &= (2\sqrt{x})^2 \\ x^2 - 6x + 9 &= 4x \end{aligned}$$

Pasando el $4x$ al primer lado de la igualdad como $-4x$, queda:

$$x^2 - 10x + 9 = 0$$

Resolviendo ésta ecuación mediante la fórmula general, se obtiene:

$x_1 = 1$ y $x_2 = 9$ Es decir, sólo el número 9 cumple con la condición del problema y es la única solución válida.

Comprobación:

$$x = 9$$

$$x = 2 \sqrt{x} + 3$$

$$9 = 2 \sqrt{9} + 3$$

$$9 = 2(3) + 3 = 9 \quad \text{OK.}$$

2.- Hallar las dimensiones de un rectángulo, sabiendo que su largo es el triple de su altura, y que si se disminuye en 1 metro su altura y se aumenta en 3 metros su largo, el área vale 72 m^2 .

Solución: El área de un rectángulo es igual a: $A = \text{largo} \times \text{altura}$

Si la altura la representamos por x , entonces las condiciones traducidas a expresiones algebraicas son: altura = x ; largo = $3x$. Por lo tanto el área inicial es igual a:

$$A = x(3x) = 3x^2$$

Pero si disminuimos la altura 1 m., $x - 1$; y si aumentamos 3 m. el largo, $3x + 3$; entonces el área vale 72 m^2 ; esto es: $72 = (x - 1)(3x + 3)$.

Realizando el producto, queda:

$$72 = 3x^2 + 3x - 3x - 3$$

$$72 + 3 = 3x^2$$

O sea:

$$3x^2 = 75$$

$$x^2 = 75/3 = 25$$

Por lo tanto, extrayendo raíz a ambos lados de la igualdad, obtenemos que la solución es:

$$x_1 = 5 \quad \text{y} \quad x_2 = -5$$

Es decir, sólo el número 5 cumple con la condición del problema y es la única solución válida. O sea: altura = 5 m. y largo = 15 m.

Comprobación:

$$x = 5$$

$$72 = (x - 1)(3x + 3)$$

$$72 = (5 - 1)(3(5) + 3)$$

$$72 = (4) (15 + 3)$$

$$72 = 4 (18) = 72 \quad \text{OK.}$$

3.- Un comerciante compra un determinado número de lapiceros por \$ 180 pesos y los vende todos menos 6 con una ganancia de \$2 pesos por lapicero. Sabiendo que con el dinero recaudado en la venta podría haber comprado 30 lapiceros más que antes, calcular el precio de cada lapicero.

Sea x el costo de cada lapicero en pesos; entonces $180/x =$ número de lapiceros que compró.

Algebraicamente: $(180/x - 6)(x + 2) = x (180/x + 30)$

Realizando los productos, queda:

$$180 + 360/x - 6x - 12 = 180 + 30x$$

Quitando el 180 de ambos lados de la igualdad, la igualdad no se altera:

$$360/x - 6x - 12 = 30x$$

Multiplicando por x toda la ecuación, para quitar denominadores:

$$x (360/x - 6x - 12 = 30x)$$

$$360 - 6x^2 - 12x = 30x^2$$

Pasando con signo contrario los términos del lado izquierdo al lado derecho:

$$30x^2 + 6x^2 + 12x - 360 = 0$$

Finalmente la ecuación de segundo grado a resolver es:

$$36x^2 + 12x - 360 = 0$$

Resolviéndola mediante la fórmula general, queda: $x_1 = 3$ y $x_2 = -10/3$

Por lo tanto la única solución válida es: $x_1 = \$ 3$ pesos cada lapicero.

Comprobación:

$$x = 3$$

$$(180/x - 6)(x + 2) = x (180/x + 30)$$

$$(180/3 - 6)(3 + 2) = 3 (180/3 + 30)$$

$$(60 - 6)(5) = 3 (60 + 30)$$

$$54(5) = 3(90)$$

$$270 = 270 \quad \text{OK.}$$

EJERCICIO 37 Resolver las siguientes ecuaciones de segundo grado:

1) $9x^2 - 9x - 28 = 0$

2) $8x^2 - 36x + 40 = 0$

3) $x^2 + 23x + 132 = 0$

4) $-15x^2 + 60 = 0$

5) $9x^2 + 72x = 0$

6) $2x^2 + 9x + 28 = 0$

Resolver los siguientes problemas mediante el uso de la ecuación de segundo grado:

- 1) Hallar 2 números positivos, sabiendo que uno de ellos es igual al triple del otro más 5 y que el producto de ambos es igual a 68.
- 2) Hallar las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 50 m y cuya área es de 150 m².
- 3) La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a 34 cm. Hallar las longitudes de los catetos sabiendo que uno de ellos es 14 cm mayor que el otro. Utilice el *Teorema de Pitágoras* que nos dice que $c^2 = a^2 + b^2$; siendo c, la *hipotenusa*, a y b son los *catetos* del triángulo rectángulo.
- 4) Dos operarios A y B, juntos realizan una tarea en 10 días. Trabajando por separado, A tardaría 5 días más que B. Hallar el número de días que tardarían en hacer la tarea trabajando cada uno por sí solo.

Hasta la Victoria Siempre!

INICIO

Diagrama para
resolver cualquier
tipo de Triángulo

" Programa para resolver
triángulos oblicuángulos"
"Caso I: Se conocen sus 3 lados"
"Caso II: Se conocen dos lados y
el ángulo entre esos lados"
"Caso III: Se conocen 2 lados y el ángulo
que no esta entre esos lados"
"Caso IV: Se conoce 2 ángulos y
un lado adyacente a un ángulo"
"Caso V: Se conoce 2 ángulos y
un lado opuesto a un ángulo"

Leer
N

si

SI
N < 1
o
N > 5?

no

SI
N = 1

si

Angulo A = $\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$
Angulo B = $\frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$
Angulo C = $\frac{c^2 - b^2 - a^2}{-2ac}$

no

SI
N = 2

si

Lado c = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$
Angulo A = $\sin^{-1} \left(\frac{a \sin C}{c} \right)$
Angulo B = $\sin^{-1} \left(\frac{b \sin C}{c} \right)$

no

SI
N = 3

si

Angulo B = $\sin^{-1} \left(\frac{b \sin A}{a} \right)$
Angulo C = $180 - (\text{Angulo B} + A)$
Lado c = $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}$

no

B

A

FIN

A

"Los datos que no se conocen
son un lado y dos ángulos
el resultado es:"

"Angulo B =" Angulo B
"Angulo C =" Angulo C
"Lado c =" Lado c

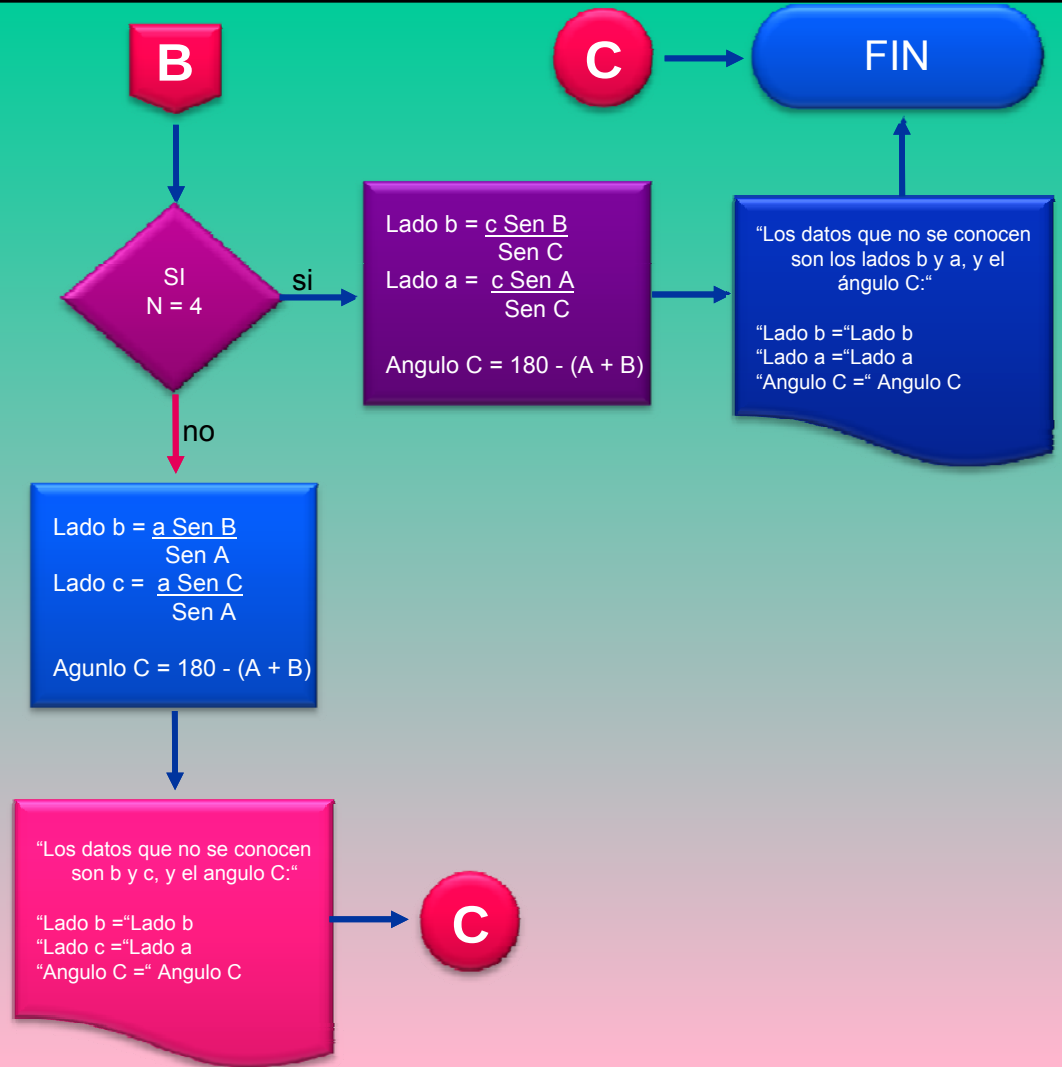
"Los datos que no se conocen
son los ángulos, los cuales
son:"

"Angulo A =" Angulo A
"Angulo B =" Angulo B
"Angulo C =" Angulo C

"Los datos que no se conocen
son un lado y dos ángulos
el resultado es:"

"Angulo A =" Angulo A
"Angulo B =" Angulo B
"Lado c =" Lado c

A



- 3) $x = 4, y = 3$
 4) $x = 397/51, y = 42/17$
 5) $x = -2/3, y = -4/3$

Ejercicio 35

- 1) $x = 3, y = 8$
 2) $x = 0, y = -6$
 3) $x = -2, y = -2$
 4) $x = -4, y = 4$
 5) $x = 7, y = -4$

Ejercicio 36

- | | |
|--|---|
| 1) 35 de 20 centavos y 43 de 10 centavos | 11) Traje a \$800 pesos, sombrero a \$60 pesos |
| 2) 40 de \$5 pesos y 51 de \$4 pesos | 12) Vaca a \$55 dólares, caballo a \$42 dólares |
| 3) 300 adultos, 400 niños | 13) Adulto 35 centavos, niño 18 centavos |
| 4) 21 de 20 centavos y 23 de 25 centavos | 14) 31 y 23 |
| 5) 155 de \$1 peso y 132 de \$2 pesos | 15) $A = 21$ y $B = 16$ |
| 6) 16 de \$3 dólares y 18 de \$7 dólares | 16) Bote 7 KPH, río 3 KPH |
| 7) 13 trajes y 41 sombreros | 17) Bote 12 KPH, río 4 KPH |
| 8) 64 y 24 | 18) A \$5 pesos, B \$3 pesos |
| 9) 815 y 714 | 19) A 30 años, B 20 años |
| 10) 63 y 48 | |

Ejercicio 37

- | | |
|----------------------------|---|
| 1) $x_1 = -4/3, x_2 = 7/3$ | 6) No tiene solución en el campo de los números reales. |
| 2) $x_1 = 5/2, x_2 = 2$ | 7) $x_1 = 4, x_2 = 17$ |
| 3) $x_1 = -11, x_2 = -12$ | 8) 10 m. y 15 m. |
| 4) $x_1 = 2, x_2 = -2$ | 9) 16 cm. y 30 cm. |
| 5) $x_1 = -8, x_2 = -8$ | 10) 22.8 días y 17.8 días. |

BONO DE PREGUNTAS Y RESPUESTAS

- ¿Cuál es el animal que anda con las patas en la cabeza? **El piojo.**
- ¿Cuál es el animal que al morir cambia de nombre? **El pez, porque después es pescado.**

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

ARITMÉTICA

Ejercicio 1

- 3 a) $<$ 8 11
 3 b) $<$ 9 a) 4
 3 c) $>$ 9 b) -7
 3 d) $>$ 9 c) -22
 3 e) $=$ 9 d) 2
 3 f) $>$ 10 + \$ 1 414 millones de pesos
 5 17 11 20 363 metros
 6 8 12 81 años
 7 7

Ejercicio 2

- 1 181 6 26 928 734
 2 4255 7 a) 223870
 3 15518 7 a) 212679
 4 3 930 455 7 a) 289324
 5 6 318 901

Ejercicio 3

- 1 163.168 5 349 718.259081
 2 663.466 6 281 385.817597
 3 3 684.8215 7 26 514.23818
 4 281
 435.95635

Ejercicio 4

- 1 501 6 585 352
 2 889 7 204 247
 3 193 735 8 4 810 996
 4 5 089 9 5 001
 5 779 010 10 212 481

Ejercicio 5

1	116.39	6	429.83263
2	352.744	7	9 385 411.5781
3	1 199.3849	8	575 586.3213
4	8 448.557	9	14 800.98938
5	171	10	75 001.9917
	385.4571		

Ejercicio 6

1	4 318	6	4 736
2	90 630	7	289 784
3	28 994 225	8	2 122 520
4	419 853 919	9	446 082
5	41 120 625	10	168 381
		11	4

Ejercicio 7

1	68.4375	6	7.3556505
2	2 857.109872	7	10.677303
3	20 225.402472	8	597.51283
4	90 514.4306	9	1 979.5335
5	68 407.99848	10	31.75 centímetros

Ejercicio 8

1	5, residuo = 8	5	714, residuo = 839
2	5, residuo = 448	6	217, residuo = 16 318
3	7, residuo = 2230	7	354, residuo = 11 691
4	1486, residuo = 165		

Ejercicio 9

- | | |
|--------------------|--|
| a) No, residuo = 6 | e) No, residuo = 4 |
| b) Sí, residuo = 0 | f) Sí, residuo = 0 |
| c) Sí, residuo = 0 | g) Entre 4 sí, entre 8 no, entre 15 no, entre 16 no y entre 25 sí. |
| d) No, residuo = 6 | |

Ejercicio 10

1	2.9617	6	999.3587
2	7.3538	7	5.47368
3	5.0311	8	200 etapas
4	1 071.4285	9	13 personas
5	27.974806	10	94 pacas de lámina

Ejercicio 11

1	1 024	6	125
2	1/16	7	81
3	2 916	8	4 096
4	64	9	1/81
5	7 776	10	625

Ejercicio 12

1	25
2	32
3	4
4	4
5	3

Ejercicio 13

2 a)	$7 \times 5 \times 3 \times 2$	2 e)	$23 \times 13 \times 5^2$
2 b)	$3^4 \times 2^6$	2 f)	$67 \times 3^5 \times 2$
2 c)	$13 \times 11 \times 7 \times 2$	2 g)	$701 \times 89 \times 7$
2 d)	$73 \times 17 \times 3^3$		

Ejercicio 14

1	160	6	3 192
2	70	7	153 790
3	9 792	8	100 billetes; 10 de \$ 10 pesos, 5 de \$ 20 pesos y 2 de \$50 pesos
4	4 446	9	60 rebanadas
5	1 200	10	80 cm.; 8 de 10 cm, 5 de 16 cm. y 4 de 20 cm.
		11	En 210 días

Ejercicio 15

- | | | | |
|------|----|------|--|
| 1 a) | 8 | 1 g) | 1587 |
| 1 b) | 11 | 2 | 700 m ² |
| 1 c) | 58 | 3 | Entre 2 personas |
| 1 d) | 19 | 4 | 4 jugadores |
| 1 e) | 31 | 5 | 10 metros |
| 1 f) | 93 | 6 | Sí, 14 pedazos del primer listón, 21 pedazos del segundo y 35 pedazos del tercero. |

Ejercicio 16

- | | | | |
|------|----------|------|--------|
| 1 a) | Propia | 2 d) | 2 1/3 |
| 1 b) | Impropia | 2 e) | 1 1/2 |
| 1 c) | Impropia | 3 a) | 5/2 |
| 1 d) | Propia | 3 b) | 21/4 |
| 1 e) | Impropia | 3 c) | 35/3 |
| 2 a) | 3 3/4 | 3 d) | 100/7 |
| 2 b) | 9 1/2 | 3 e) | 102/10 |
| 2 c) | 3 1/3 | | |

Ejercicio 17

- | | | | |
|-------|-------|-------|---------|
| I 1) | 5 1/5 | II 2) | 5 7/12 |
| I 2) | 2 2/3 | II 3) | 6 11/20 |
| I 3) | 1 | II 4) | 9 7/15 |
| II 1) | 2 1/6 | | |

Ejercicio 18

- | | | | |
|-------|-------|-------|---------|
| I 1) | 1 | II 2) | 1 5/6 |
| I 2) | 1 2/9 | II 3) | 1 19/20 |
| I 3) | 1/3 | II 4) | 5/12 |
| II 1) | 5/6 | | |

Ejercicio 19

- | | | | |
|---|-----|---|-----------|
| 1 | 3/7 | 6 | 2 2/5 |
| 2 | 33 | 7 | 1 229/300 |

3	$2 \frac{1}{7}$	8	$3 \frac{3}{4}$
4	$17 \frac{1}{3}$	9	$3 \frac{3}{8}$
5	$6 \frac{3}{10}$	10	$2 \frac{37}{162}$

Ejercicio 21

1	$27/55$	6	$1/16$
2	$3 \frac{3}{5}$	7	1
3	6	8	44
4	72	9	$\frac{1}{4}$
5	$1 \frac{13}{14}$	10	$4/625$

Ejercicio 22

1	$2 \frac{2}{3}$ metros	9	$171 \frac{1}{4}$ litros
2	$1 \frac{2}{5}$ horas	10	$94 \frac{1}{2}$ pesos; $7 \frac{3}{10}$ pesos a Matuco, $8 \frac{9}{20}$ pesos a Agapito.
3	$1 \frac{7}{15}$ pulgadas	11	$10 \frac{30}{37}$ viajes, es decir, semejante a 11 viajes.
4	$19 \frac{3}{4}$ pesos	12	La primera mezcla
5	$\frac{3}{4}$ horas	13	19 discos y $\frac{1}{70}$ de otro
6	$196 \frac{5}{8}$ litros	14	El segundo jugador
7	190 asientos	15	320 estudiantes
8	\$ 375 pesos		

Ejercicio 23

1	5.5 horas
2	\$ 162 pesos
3	5 metros
4	1 : 200
5	9.90

Ejercicio 24

1	7 %
2	64.99 %
3	420 %; 93 alumnos de incremento cada año.
4	13.64 %
5	El primero \$ 1 400 pesos y \$ 2160 pesos el segundo.

- 6 38.88 %
- 7 44 %

Ejercicio 25

- 1 26.7813
- 2 81 227.1138
- 3 567.2198
- 4 9 419 896.959
- 5 4.8780
- 6 17.6316
- 7 1.3893

RESPUESTA AL EXAMEN FINAL DE ARITMÉTICA

- 1 Cada señal debe estar a cada 8 kilómetros
- 2 56 kgs.
- 3 \$ 178 400 pesos pierde en 5 días; 21.86 días , es decir, 22 días para declararse en quiebra.
- 4 El primer elevador
- 5 No, ya que para eso requiere tener una cantidad de \$ 1230 pesos.
- 6 $30 \frac{3}{4}^{\circ} \text{C}$
- 7 9.7

RESPUESTAS A LOS EJERCICIOS

ÁLGEBRA

Ejercicio 1

- | | | | |
|-----|------|-----|-------|
| 1a) | 36 | 2b) | 118 |
| 1b) | - 31 | 2c) | $x y$ |
| 1c) | - 36 | 2c) | 162 |
| 1d) | 2 | 2d) | 43 |
| 1e) | - 21 | 2e) | 3 |
| 1f) | - 4 | 2f) | 60 |
| 1g) | 86 | 2g) | 3 |
| 1h) | 80 | | |
| 2a) | 12 | | |

Ejercicio 2

- 1) $- 4x + 4y + 1$
- 2) $20x + 17y - 6w + 7z - 12$
- 3) $- 14a - 8b + 15$
- 4) $a - b + 2c + 5d$
- 5) $- 3w + z + 21$
- 6) $- 4x - y + 7$
- 7) $\frac{5}{6}x + \frac{1}{2}y$

Ejercicio 3

- | | | | |
|----|----------|-----|---------------|
| 1) | 70 | 8) | - 960 |
| 2) | 6480 | 9) | 2160 |
| 3) | - 18 144 | 10) | $\frac{3}{8}$ |
| 4) | - 135 | | |
| 5) | - 6480 | | |
| 6) | - 21 168 | | |
| 7) | 770 | | |

Ejercicio 4

- 1) 2
- 2) - 6
- 3) $108/5 = 21.6$

Ejercicio 5

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1) 64 | 6) $\frac{4}{9}$ |
| 2) 1296 | 7) $-27/125$ |
| 3) -1 | |
| 4) -512 | |
| 5) $\frac{1}{16}$ | |

Ejercicio 6

- | | |
|-------------------|------------------|
| 1) a^{17} | 9) $16 a^{-6m}$ |
| 2) a^2 | 10) x^{3m} |
| 3) a^9 | 11) $-15 a^2$ |
| 4) a^{-12} | 12) $6 a^5$ |
| 5) $3 a^{7x}$ | 13) $27 x^{-5}$ |
| 6) $5 b^{6y}$ | 14) $15 x^4 y^5$ |
| 7) $12 a^{-12t}$ | 15) 2^{4x} |
| 8) $28 a^{9w-3z}$ | |

Ejercicio 7

- 1) $-8 a^5 b^3 c^4$
- 2) $-15 x^3 y^4 w g c$
- 3) $48 x^2 y^3$
- 4) $20 a^2 b^3 x^3 y^4$
- 5) $-4/3 x^4 y^3 z^2 a b$

Ejercicio 8

- 1) $43/12 = 3.5833$
- 2) $105/8 = 13.125$
- 6) $31/6 = 5.1667$
- 3) 30
- 4) 3
- 5) 3.4387

Ejercicio 9

- | | |
|-------|--------------------|
| 1) 26 | 14) $-13/2 = -6.5$ |
| 2) 14 | 15) $242/5 = 48.4$ |

- | | |
|---------------------|-------------------------|
| 3) $13 \frac{3}{4}$ | 16) $-93/160 = 0.58125$ |
| 4) $2 \frac{1}{40}$ | 17) $-24/9 = -2.6667$ |
| 5) $\frac{23}{23}$ | 18) -35 |
| 6) 294 | 19) -12.76 |
| 7) -16 | 20) $-1 \frac{41}{72}$ |
| 8) 36 | 21) 17 |
| 9) $\frac{9}{5}$ | 22) 6 |
| 10) $27/5 = 5.4$ | 23) 24 |
| 11) 7 | 24) 2 |
| 12) 1 | 25) $\frac{3}{4}$ |
| 13) 0 | |

Ejercicio 10

- | | |
|-----------------------------|---|
| 1) $6x^3$ | 6) $10a^{m+3}b^{1+n}$ |
| 2) $-35x^5y$ | 7) $-2x^{3m}y^{4n}$ |
| 3) $2x^3y^3zt$ | 8) $-21x^{1+2m}y^{1+2n}z^{6+4n}$ |
| 4) $6 \frac{2}{3}x^3y^2z^5$ | 9) $2 \frac{11}{32}x^{n+m+3}y^{2m+n}z^{4n+1}$ |
| 5) $2x^{4+a}y^{3+b}t^{4+c}$ | 10) $2x^{2a+7}y^{2b+7}t^{3a+c+6}$ |

Ejercicio 11

- | | |
|--------------------------------|---|
| 1) $243x^{10}$ | 5) $25/16 (5/4)^m x^{6m}y^{4m}t^{6m}$ |
| 2) $15625x^6y^9z^3$ | 6) $256a^{12}a^6b^{16n} = 256a^{18}b^{16n}$ |
| 3) $1/16x^8y^4z^8t$ | 7) $4/9x^{m+1}y^{2n+2}z^{4n-3}$ |
| 4) $64/9x^{-8a}y^{-4b}z^{-6c}$ | |

Ejercicio 12

- | | |
|---------------------|------------------------|
| 1) x^4 | 7) 16 |
| 2) $x^2/3$ | 8) $1/625$ |
| 3) $1/x^4$ | 9) 288 |
| 4) $8/x^2$ | 10) x^2 |
| 5) $\frac{3}{4x^5}$ | 11) $\frac{4x^5}{y^6}$ |

- 6) $9x^6/5$

Ejercicio 13

- 1) $5x^2$
- 2) $\frac{4x^2}{y^2}$
- 3) $a^3 b^4/2$
- 4) $2x^2$
- 5) $-4a^{m-4}b^{-2x-1}$
- 6) ab

- 7) $a^n b^x$
- 8) $1\frac{1}{2} x^{a-2} y^{b+3}$
- 9) $-9n^4 p$
- 10) $4x^a z^{b-6}$
- 11) $\frac{4y^3}{x^3}$

Ejercicio 14

- 1) $5x^2 + 3y$
- 2) $7a^2 + 5b^2 + 7ab$
- 3) $4\frac{5}{12}a^2$
- 4) $22x^2y z^3 + 7x^2y z^2$
- 5) $7wx^2 + 5xy$
- 6) $9a^2c + 15ac$
- 7) $6\frac{3}{8}h^2x^3z$
- 8) $10h$
- 9) $7x^3z^3 + 3x^3y$
- 10) $15\sqrt{x}$

Ejercicio 15

- 1) $2xz - 6xy$
- 2) $-5z^2 - 2xy + 9$
- 3) $xz - 6xyz$
- 4) $4\frac{1}{4}a - 6b^2c + 9c$
- 5) $4xy - 9\frac{3}{8}az - 10\frac{2}{3}b^2$
- 6) $20\frac{1}{2}w^2 + 14\frac{4}{5}z + xz^2$
- 7) $14/x^2 - 12x^2$
- 8) $17x^2yz - 25a^2 - 18bc^2$
- 9) $3x^2 - 3a^2b^2 - 10xyz$
- 10) $3z^x + 13e^x - 27\sqrt{x}$

Ejercicio 16

- 1) $15ab^2 + 3ac$
- 2) $6b^3 + 4b^2c - 8b^2$
- 3) $168c^3b + 140cb^2$
- 4) $65bc + 10b^2c^2 - 15abc$
- 5) $34x^2yz + 30x^2za - 28xz^2$
- 6) $9x^2 - 9x^2y - 9/8xz$
- 7) $3/2hz^3 - 3/2h zx + 21/2h^2zb$
- 8) $9x^{3/2}y - 14x^{5/2} + 50x^{7/2}$
- 9) $60x^{5/2}y^{4/3} - 225x^{1/2}y - 225x^{1/2}y^{7/3}$
- 10) $4\frac{1}{4}x - 28\frac{1}{3}x^{3/2}h + 3/16x^{1/2}h^{1/3} - 1\frac{1}{4}xh^{4/3}$
- 11) $-6a^{m+3}b^{1+n}$
- 12) $2a^{4m}b^{5n}$

- 13) $- a^{4m+3} b^{4n+2}$
- 14) $\frac{2}{9} x^{2m+5} b^{3n+2}$
- 15) $16 a^{6+m} b^3 - a^{3m+5} b^{2n+2} + 24 a^5 b^{4n+1}$
- 16) $10 x^{3m+4} y^{3n} - 20 x^{7m-1} y^{6n-3} - 35 x^{2m+1} y^5$
- 17) $- 33 x^{7+m} + 15 x^{4m} + \frac{12}{13} x^{7-2n} y$

Ejercicio 17

- 1) $a - 1$
- 2) $a - 3$
- 3) $m - 5$
- 4) $a + 3$
- 5) $5x - 4y$
- 6) $2x + 4$
- 7) $2y - 11$
- 8) $a^3 - a^2 + a$
- 9) $x^3 - 2x^2 + 3x - 1$
- 10) $m^3 - m^2 + m - 2$

Ejercicio 18

- 1) $2^{2a} + 2^{a+1} c + c^2 = 4^a + 2^{a+1} c + c^2$
- 2) $25 c^2 + 30 c d + 9 d^2$
- 3) $4 a^4 + 4 a^2 b^3 + b^6$
- 4) $100 b^2 + 20 971 520 b + 32^8$
- 5) $225 c^2 + 30 c d + d^2$
- 6) $36 a^2 - 24 a b + 4 b^2$
- 7) $a^{10} - 2 a^5 d^2 + d^4$
- 8) $x^2 - 2 x y^2 + y^4$
- 9) $49 c^2 d^2 - 14 c d x + x^2$
- 10) $x^2 a^2 - 4 a b x^6 + 4 b^2 x^{10}$
- 11) $49 x^2 y^{10} - 56 x y^5 a^4 z + 16 a^8 z^2$
- 12) $x^{2a-4} - 6 x^{a-2} b^x + 9 b^{2x}$
- 13) $x^2 y^{10} - 8 x y^5 c^{-2} + 16 c^{-4}$
- 14) $49 b^{-4} - 42 b^{-2} x^5 + 9 x^{10}$
- 15) $a^{2x} - 2 a^x b^a + b^{2a}$
- 16) $a^{2n} + 2 a^n b^a + b^{2a}$
- 17) $324 a^{-4} + 36 a^{-2} b^5 + b^{10}$
- 18) $81 b^6 + 270 b^3 c^{-2} + 225 c^{-4}$
- 19) $289 x^6 y^2 z^4 + 272 x^3 y z^2 a n^a + 64 a^2 n^{2a}$
- 20) $49 b^8 + 10 \frac{1}{2} b^4 a^{-5} + \frac{9}{16} a^{-10}$

Ejercicio 19

- 1) $8^a + (12) 2^a c + (3) 2^a c^2 + c^3$
- 2) $125 c^3 + 225 c^2 d + 135 c d^2 + 27 d^3$
- 3) $8 a^6 + 12 a^4 b^3 + 6 a^2 b^6 + b^9$
- 4) $1000 b^3 + 300 b^2 (32)^4 + 30 b (32)^8 + (32)^{12}$
- 5) $3375 c^3 + 675 c^2 d + 45 c d^2 + d^3$
- 6) $216 a^3 - 216 a^2 b + 72 a b^2 - 8 b^3$
- 7) $a^{15} - 3 a^{10} d^2 + 3 a^5 d^4 - d^6$
- 8) $x^3 - 3 x^2 y^2 + 3 x y^4 - y^6$
- 9) $343 c^3 d^3 - 147 c^2 d^2 x + 21 c d x^2 - x^3$
- 10) $x^3 a^3 - 6 x^2 a^2 b x^5 + 12 x a b^2 x^{10} - 8 b^3 x^{15}$
- 11) $343 x^3 y^{15} - 588 x^2 y^{10} a^4 z + 336 x y^5 a^8 z^2 - 64 a^{12} z^3$
- 12) $x^{3a-6} - 9 x^{2a-4} b^x + 27 x^{a-2} b^{2x} - 27 b^{3x}$
- 13) $x^3 y^{15} - 12 x^2 y^{10} c^{-2} + 48 x y^5 c^{-4} - 64 c^{-6}$
- 14) $343 b^{-6} - 441 b^{-4} x^5 + 189 b^{-2} x^{10} - 27 x^{15}$
- 15) $a^{3x} - 3 a^{2x} b^a + 3 a^x b^{2a} - b^{3a}$
- 16) $a^{3n} + 3 a^{2n} b^a + 3 a^n b^{2a} + b^{3a}$
- 17) $5832 a^{-6} + 972 a^{-4} b^5 + 54 a^{-2} b^{10} + b^{15}$
- 18) $729 b^9 + 3645 b^6 c^{-2} + 6075 b^3 c^{-4} + 3375 c^{-6}$
- 19) $4913 x^9 y^3 z^6 + 6936 x^6 y^2 z^4 a n^a + 3264 x^3 y z^2 a^2 n^{2a} + 512 a^3 n^{3a}$
- 20) $343 b^{12} + 110 \frac{1}{4} b^8 a^{-5} + 11 \frac{13}{16} b^4 a^{-10} + 27/64 a^{-15}$

Ejercicio 20

- | | |
|--------------------------|--------------------------|
| 1) $a^2 - 1$ | 9) $e^2 - n^2$ |
| 2) $n^2 - 4$ | 10) $n^2 - m^4$ |
| 3) $9 n^2 - 4$ | 11) $9 b^4 - b^6$ |
| 4) $49 b^2 - c^2$ | 12) $14 b^{10} - c^4$ |
| 5) $81 x^2 y^2 - 16 c^2$ | 13) $z^{2n} - b^{2x}$ |
| 6) $36 b^2 - c^2$ | 14) $9 n^4 - b^2$ |
| 7) $m^2 - n^2$ | 15) $9 c^{2c} n^2 - b^4$ |
| 8) $x^2 y^2 - z^2$ | |

Ejercicio 21

- | | |
|--------------------|---|
| 1) $4x - 9 m n^2$ | 5) $100 x^2 - 80 x y + 64 y^2$ |
| 2) $2x + 3y - z^2$ | 6) $x^2 - x (5a + 6n)^3 + (5a + 6n)^6$ |
| 3) $9x + 4y$ | 7) $25 a^2 x^2 + 20 a^3 x y + 16 a^4 y^2$ |

$$4) \quad 7 + (3a + 4n)^2 \quad 8) \quad 36x^2 + 6x(4x + 3y) + (4x + 3y)^2$$

Ejercicio 22

- 1) $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- 2) $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
- 3) $a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
- 4) $a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
- 5) $x^8 - 8x^7y + 28x^6y^2 - 56x^5y^3 + 70x^4y^4 - 56x^3y^5 + 28x^2y^6 - 8xy^7 + y^8$
- 6) $64a^6 - 192a^5b + 930a^4b^2 - 160a^3b^3 + 60a^2b^4 - 12ab^5 + b^6$
- 7) $2187b^7x^7 + 25515b^6x^6c + 127575b^5x^5c^2 + 354375b^4x^4c^3 + 590625b^3x^3c^4 + 590625b^2x^2c^5 + 328125bxc^6 + 78125c^7$
- 8) $16807b^{10} + 108045b^8d + 277830b^6d^2 + 357210b^4d^3 + 229635b^2d^4 + 59049d^5 + 328125bd^6 + 78125d^7$
- 9) $81b^4 + 756b^3xy + 2646b^2x^2y^2 + 4116bx^3y^3 + 2401x^4y^4$
- 10) $1024x^{10}y^{10} + 15360x^9y^9b^2 + 103680x^8y^8b^4 + 414720x^7y^7b^6 + 1088640x^6y^6b^8 + 1959552x^5y^5b^{10} + 2449440x^4y^4b^{12} + 2099520x^3y^3b^{14} + 1180980x^2y^2b^{16} + 393660xyb^{18} + 59049b^{20}$

Ejercicio 23

- | | |
|--|--|
| 1) $a(a^2 + b)$ | 9) $(a + b)(cx + d)$ |
| 2) $3a(1 + b)$ | 10) $(x + y)(a + c + z + a) = (x + y)(2a + c + z)$ |
| 3) $x(2 + 3 + 1) = 6x$ | 11) $(x + 2)(x + 3y + 5c)$ |
| 4) $3b(2a + c + 3)$ | 12) $3x(a - c + 3x - 4 - 3x + 4) = 3x(a - c)$ |
| 5) $c(7 + 2ab)$ | 13) $(3x + y)(3c + 2 + 3c - 2) = (3x + y)(6c)$ |
| 6) $3x(x + y)$ | 14) $(16c + 3)(12bc + 5bc) = (16c + 3)(17bc)$ |
| 7) $b(9c + 2a + 3d)$ | 15) $(3b^2 + x)(7xy - 9by) = (3b^2 + x)(y)(7x - 9b)$ |
| 8) $cb(5cb^2 + 10b^2 + b^2) = cb(5cb^2 + 11b^2)$ | 16) $(2b + c)(12x - 21y - 3d)$ |

Ejercicio 24

- | | |
|---|---------------------------|
| 1) $(a + m)(m + n)$ | 6) $(d + 2c)(5)(xb + 5a)$ |
| 2) $(y)(3z(2x + 3) + x + y) + x(3 + z)$ | 7) $(k + 1)(k + m)$ |

- 3) $(y + a)(x + b)$
- 4) $b(ac + 9a) + 3d(4c + a)$
- 5) $6c(b + 2d) + 3a(d + 3b)$

- 8) $(z + x)(a + b)$
- 9) $(e + v)(ih + az)$
- 10) $(1 + x^2 - 3x)(a^2b^3 - n^4)$

Ejercicio 25

- 1) $(h - i)^2$
- 2) $(3x - 3z)^2$
- 3) $(5y^2 - 3z)^2$
- 4) $(3a^2 - 2b^3)^2$
- 5) $(2ab + c^2)^2$
- 6) $(5a - bc^2)^2$
- 7) $(3h^3 + i)^2$
- 8) $(3b^2 + 5c)^2$
- 9) $(9xy - 3z)^2$
- 10) $(hi^2 + 4x^2z^3)^2$
- 11) $(9bch - 4xy)^2$
- 12) $(3b - \frac{2}{3}h)^2$
- 13) $(2c + \frac{1}{2}x^2)^2$
- 14) $(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}ch)^2$
- 15) $(3xh + 2ab)^2$

Ejercicio 26

- 1) $(a^2 - 2b)(a^2 + 2b)$
- 2) $(3c^2 - b^3)(3c^2 + b^3)$
- 3) $(5b^4 - 9c^2)(5b^4 + 9c^2)$
- 4) $(7b^n - 4c^2)(7b^n + 4c^2)$
- 5) $(2b^{3n} - 5bc^3)(2b^{3n} + 5bc^3)$
- 6) $(a + b - b^2)(a + b + b^2)$
- 7) $(2xy^3 - (a + c))(2xy^3 + (a + c))$
- 8) $((-x - (x + y))(-x + (x + y)))$
- 9) $(3b^2 + c - 2xb^3)(3b^2 + c + 2xb^3)$
- 10) $(3b + z^3 - (5b^2 - 3c))(3b + z^3 + (5b^2 - 3c))$
- 11) $(5b^4 - 5c^3)(5b^4 + 5c^3)$
 $= 25(b^4 - c^3)(b^4 + c^3)$
- 12) $(8c^2 - 4dc^2)(8c^2 + 4dc^2)$
 $= 16c^4(2 - d)(2 + d)$
- 14) $(b - 7xy^3)(b + 7xy^3)$
- 15) $(2c^3 - 10xy^2)(2c^3 + 10xy^2)$

Ejercicio 27

- 1) $(x + 2)(x + 5)$
- 2) $(x - 2)(x + 5)$
- 3) $(a + 1)(a + 3)$
- 4) $(y - 4)(y - 5)$
- 11) $(x + 4)(x - 9)$
- 12) $(x + 4)(x - 10)$
- 13) $(a + 5)(a - 7)$
- 14) $(m - 2)(m + 15)$

- | | |
|----------------------|------------------------|
| 5) $(x - 1)(x - 8)$ | 15) $(x + 7)(x + 8)$ |
| 6) $(x - 1)(x - 2)$ | 16) $(a - 5)(a + 12)$ |
| 7) $(a + 1)(a + 6)$ | 17) $(m + 10)(m - 30)$ |
| 8) $(n - 2)(n - 6)$ | 18) $(c + 9)(c + 15)$ |
| 9) $(a - 2)(a + 9)$ | 19) $(m + 15)(m - 45)$ |
| 10) $(x - 2)(x - 5)$ | 20) $(m + 28)(m - 36)$ |

Ejercicio 28

- | | |
|--------------------------|---|
| 1) $\frac{3}{4}x$ | 10) $x/y(x + y) = 128$ |
| 2) $\frac{1}{2}(x + y)$ | 11) $x + x + 2 + x + 4$ |
| 3) $\frac{1}{2}(x - y)$ | 12) $x + y + z + t$ |
| 4) $2x + 1$ | 13) $A = a^2$ |
| 5) $5x - 3$ | 14) $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ |
| 6) $x + y = 120$ | 15) $a = \sqrt{b^2 + c^2}$ |
| 7) $x - y = 80$ | 16) $V = \pi r^2 h$ |
| 8) $A = x^2$ | 17) $A_1 V_1 = A_2 V_2$ |
| 9) $(x + y)(x - y) = 12$ | 18) $(4x - 3) / x$ |

Ejercicio 29

- El doble de un número más el triple de otro y más el cuádruplo de un tercer número.
- El quíntuplo de un número menos el triple de otro.
- El triple producto del primero al cubo por el segundo al cuadrado y por un tercer número.
- El producto del primero a la cuarta por el segundo al cuadrado, más el producto del primero al cubo por el segundo al cuadrado y menos el producto del cuadrado del primero por el cubo del segundo.
- La fuerza es igual al producto de la masa por la aceleración.
- El cuadrado del lado opuesto es igual a la suma del cuadrado de los lados conocidos, menos su doble producto por el coseno del ángulo que forman entre ellos.
- El semiperímetro de un triángulo es igual a la suma de sus tres lados dividida entre 2.
- La población futura es igual al producto de la población inicial por la potencia al número de años de la suma de 1 más la razón de crecimiento de la población.
- El trabajo realizado por una fuerza es igual al producto de la fuerza por la distancia a través de la cual se mueve la fuerza.
- La velocidad del sonido en el aire es igual 331.5 más el producto de 0.607 por la temperatura del aire en °C.
- La fuerza eléctrica entre 2 cargas puntuales es igual al producto de una

constante por el valor de las cargas eléctricas puntuales y dividido todo entre el cuadrado de la distancia que las separa.

- 12) Los caballos de potencia de una barra giratoria es igual al producto de π por las revoluciones por minuto por el momento de torsión producido y dividido todo entre 225 000.

Ejercicio 30

- | | |
|-------------|--------------|
| 1) $x = 6$ | 6) $x = 12$ |
| 2) $x = 4$ | 7) $x = 9$ |
| 3) $x = 34$ | 8) $x = 800$ |
| 4) $x = 16$ | 9) $x = 70$ |
| 5) $x = 9$ | 10) $x = 3$ |

Ejercicio 31

- | | |
|-------------------|---|
| 1) $x = 9$ | 8) Burro \$ 15 000 pesos, silla \$ 1000 pesos, arreos \$ 500 pesos y herraduras \$ 250 pesos. |
| 2) $x = 20$ | 9) 80 adultos y 200 niños. |
| 3) $x = -- 2$ | 10) 23 días y faltó 2 días. |
| 4) $x = -- 13$ | 11) Juan 20 años y Fernando 10 años. |
| 5) $x = -- 2$ | 12) 16, 6 y 32 |
| 6) 67, 69, 71, 73 | 13) 30 |
| 7) 28, 30, 32, 34 | 14) 34 y 14 |

Ejercicio 32

- 1) $x = 3, y = -- 2$
- 2) $x = 1, y = -- 1$
- 3) $x = -- 5, y = 4$
- 4) $x = 3, y = -- 3$
- 5) $x = 4, y = 8$

Ejercicio 33

- 1) $x = \frac{3}{4}, y = \frac{1}{2}$
- 2) $x = 5, y = 4$
- 3) $x = 3, y = 3$
- 4) $x = -- 6, y = -- 7$
- 5) $x = \frac{2}{3}, y = -- \frac{44}{3}$

Ejercicio 34

- 1) $x = \frac{5}{7}, y = -- \frac{1}{7}$
- 2) $x = \frac{7}{2}, y = 8$

3. ¿Cuál es el animal que come con la cola? **Todos, porque ninguno se la quita para comer.**
4. ¿Por qué el perro mueve la cola? **Porque la cola no puede mover al perro.**
5. ¿Cómo sacarías un elefante de un pozo de agua? **Mojado.**
6. ¿Cuántas anclas tiene un barco? **Once, que no han oído cuando los marineros gritan ¡Eleven (11) anclas! ¡Eleven anclas!**
7. ¿Cuál es la mitad de uno? **El ombligo.**
8. ¿Cuánto es la mitad de dos más dos? **Tres.**
9. Llegan 2 muchachas a un hotel buscando una habitación para ellas dos. Pero al hablar con el administrador este les dice que no hay, por que todas están ocupadas ¿A qué horas sucedió esto? **A la 1:45 porque falta un cuarto para las dos.**
10. Sale un avión del aeropuerto de Acapulco con destino a Los Ángeles; al mismo tiempo sale un avión de los Ángeles con destino al puerto de Acapulco ¿Cómo se llaman los pilotos? **Los pilotos se llaman utilizando la radio.**
11. ¿Quiénes son más inteligentes los padres o los hijos? **Los hijos ¿A ver quien inventó la máquina de vapor? James Watt ¿A ver porque no la inventó su papá?**
12. ¿Cuántos gallegos se necesitan para cambiar un foco? **1001. Uno para que agarre el foco y 1000 para que le den vueltas a la casa.**



Un día siempre logra todo lo que propone

